学位取得者・学術奨励賞受賞者の紹介

第62回 学位取得者　第19回 学術奨励賞

東京理科大学 創域理工学部
数理科学科 嘱託助教
吉﨑 彪雅（よしざき ひゅうが）

東京理科大学
理工学部　数学科　（2014年度入学）　（現 創域理工学部 数理科学科）
理工学研究科 数学専攻（2019年度修士課程修了）（現 創域理工学研究科）
理工学研究科 数学専攻（2023年度博士課程修了）（現 創域理工学研究科）

拡張ペル方程式の求解を目指して

この度は科学フォーラムへの寄稿の機会をいただき，誠にありがとうございます．本稿では，私の研究内容の紹介を中心に，研究で行き詰まった際に背中を押してくれた言葉についても少しお話ししたいと思います．

ペル方程式

私の研究対象は，タイトルにもある「拡張ペル方程式」というものです．まずはペル方程式について紹介しましょう．平方数でない正の整数 m に対して，

$$x^2-my^2=1$$

という形の方程式を，**ペル方程式**といいます．ペル方程式では，主に x，y が共に整数となる解（整数解）を求めます．中学校で習う $ax^2+bx+c=0$ のような，未知数が一つの二次方程式では解は有限個でしたが，実はペル方程式には解が無限個存在します．そして，(x, y) が解になるとき，x，y の符号を変えても解になるので，正の解だけ見れば十分です．さらに，$(1, 0)$ 以外で x が最も小さくなる正の解（ここでは**最小解**と呼ぶことにします）から，すべての正の解を“生成”することができます．たとえば，$x^2-2y^2=1$ というペル方程式を考えてみましょう．$(1, 0)$ 以外の正となる解を x が小さい順に並べると，

$$(x, y)=(3, 2),\ (17, 12),\ (99, 70),\ (577, 408),\ldots$$

となります．興味深いことに，$(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$，$(3+2\sqrt{2})^3=99+70\sqrt{2}$，$(3+2\sqrt{2})^4=577+408\sqrt{2}$ となり，正の解はすべて $3+2\sqrt{2}$ を整数乗したものの中に登場します．この意味で，最小解はすべての解を“生成”することができます．では，最小解はどのように探せばよいでしょうか．その答えが，次に紹介する連分数展開です．

連分数展開

実数 α に対して，整数 a_0，a_1，$a_2,\ldots$ によって

$$\alpha=[a_0, a_1, a_2,\ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$$

の形で表すことを，**連分数展開**といいます．実は，$\sqrt{m}$ の連分数展開は，ある l が存在して，a_{l+1} 以降は $a_1,\ldots,a_l$ が繰り返し現れる形をしています．それを，

$$\sqrt{m}=[a_0, \overline{a_1,\ldots,a_l}]=[a_0, a_1,\ldots,a_l, a_1,\ldots,a_l,\ldots]$$

と表します．たとえば，$\sqrt{2}=[1, \overline{2}]$ となります．ペル方程式 $x^2-my^2=1$ の最小解を (p, q) とすると，$\sqrt{m}$ の連分数展開 $\sqrt{m}=[a_0, \overline{a_1,\ldots,a_l}]$ に対して，

$\dfrac{p}{q}=[a_0, a_1,\ldots,a_{l-1}]$（$l$ が偶数の場合）

$\dfrac{p}{q}=[a_0, a_1,\ldots,a_{2l-1}]$（$l$ が奇数の場合）

が成り立ちます．すなわち，ペル方程式の最小解は，連分数展開を計算すればわかるのです！　面白いですね．なぜこのようなことが起こるかというと，ここで詳しくはご紹介できませんが，その背景には「近似論」という理論があります．次に，連分数展開を計算するアルゴリズムを見ていきましょう．与えられた実数 α に対して，その整数部分を a_0 とします．次に，$\alpha_1=1/(\alpha-a_0)$ とおき，α_1 の整数部分を a_1 とします．この操作を続けていき，数列 a_0，a_1，$a_2,\ldots$ を作ります．このとき，$\alpha=[a_0, a_1, a_2,\ldots]$ になっているのです．

拡張ペル方程式

お待たせしました，いよいよ本題の拡張ペル方程式です．まず，$X_0=0$，$X_n=\sqrt{2+X_{n-1}}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ldots$）と定めます．すなわち，

$X_1=\sqrt{2}$，$X_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$X_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…

という形です．また，整数係数多項式に X_n を代入して得られる数全体を $\mathbb{Z}[X_n]$ とおきます．つまり，$a+bX_n+cX_n^2+dX_n^3+\cdots$ のような数も扱える世界を考えるということです．このとき，拡張ペル方程式とは，

$$x^2-X_n^2y^2=1$$

という方程式であり，$\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ における解を求めます．たとえば $n=1$ の場合を考えると，$x^2-2y^2=1$ の整数解を求める問題となり，これはまさしく古典的なペル方程式になっています．

私は古典的なペル方程式の解法に倣い，X_n の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ における連分数展開を用いて拡張ペル方程式が解けないだろうか，という発想でこの問題に取り組みました．しかし，そもそも連分数展開を整数から $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ に拡張したアルゴリズムが存在しないため，私の研究は連分数展開を求めるところから始まります．先ほどご紹介したように，従来の連分数展開アルゴリズムは，与えられた実数から整数部分を引いて逆数をとる操作の繰り返しでした．しかし，X_n の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ における整数部分とはなんでしょうか．私は，考える世界を高次元に拡張することで，自然な“整数部分”を定義しました．

例として，$n=2$，$X_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ の $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 連分数展開アルゴリズムを見てみましょう．まず，$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ の各元 $a+b\sqrt{2}$ を，$\mu(a+b\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2}\,,\,a-b\sqrt{2})$ として平面に埋め込みます．このとき，埋め込まれた各点は，平面の格子点となっています．これはちょうど，数直線上に整数点が等間隔に並んでいることの2次元版とみなせます．さて，次に X_2 も $\mu(X_2)=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\,\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ として平面に埋め込みます．$\sqrt{2-\sqrt{2}}$ は，X_2 の共役です．これで準備が整いました．X_2 の“整数部分”を「$\mu(X_2)$ に最も近い $\mu(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ の点」として定義します．そして，あとは従来の連分数展開アルゴリズムと同様に，整数部分を引いて逆数をとる，という操作を繰り返します．この方法で，次のような連分数展開を得ました．

$$X_n=\left[1,\overline{2(1+X_{n-1})^{-1},\ 2}\right]$$

ここで難しかったのは，すべての n に対して各整数部分 $(1,\ 2(1+X_{n-1})^{-1},\ 2)$ を求めていくことでした．例では $n=2$ の場合で，平面への埋め込みを考えましたが，一般には 2^{n-1} 次元空間への埋め込みを考えます．計算機を用いれば，小さな n に対して求めることはでき，すべての n に対して上記が整数部分となるであろうことは予想できます．しかし，なにしろ高次元空間においてある点から最も近い点を求めるのですから，そんなことが果たして証明できるのか，自信が全くありませんでした．そこで，（今もお世話になっている）当時の指導教員に相談したところ，「正しいならば証明できる」と言われ，それがとても励みになりました．内容は当たり前のように思われるかもしれません．しかし当時の私は，自信のなさから問題の難しさを自分の手に余るものと決めつけていたのです．そんな私には目の覚めるような一言でした．かくして，何とか証明でき，連分数展開は求まりました．さらに，古典的な解法に倣って明示的な解を一組構成でき，その解の共役たちが解全体を生成するだろうと予想しました．実はこの予想は，拡張ペル方程式の背景にある Weber 問題と呼ばれる有名な未解決問題と同値になっています．そして，現在 Weber 問題が肯定的に解決されている $1\leq n\leq 6$ については，私の予想も正しいことが保証されています．すなわち，拡張ペル方程式も，連分数展開によって生成解が得られているのです！これは信じられないほど不思議な現象です．この秘密を解明することが，私の一生の悲願です．

最後に，今回は私の研究内容を紹介させていただきました．面白さをお伝えできたでしょうか．ゴールはまだまだ先です．古典的解法のときは問題にすらなかったことが，拡張版では難攻不落な壁としていくつも立ちはだかります．しかし，いつか解明できると信じています．なぜなら，「正しいならば証明できる」ので．