

数理モデルとしての微分方程式

— 人口モデルから輸送方程式まで —

東京理科大学 理学部第一部 数学科 准教授 | すぎやま ゆうすけ 杉山 裕介

1. 微分方程式

微分方程式を簡単に説明すると、関数 f を解とする方程式で、 f の微分（導関数） $\frac{df}{dt} = f'$ を含むものを指します。念のため微分の定義をおさらいしておく、微分とは、関数の変化の速さを表すものであり、次の極限で定義されます：

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

この極限が存在するとき、 f は t において微分可能であるといい、その値を $f'(t)$ と書きます。微分方程式は、 f の二階導関数 f'' や高階導関数 $f^{(n)}$ を含んでも構いません。さまざまな物理現象、社会現象を説明するモデルとして利用されており、数学の世界に閉じない面白さがあります。関数の変数が二つになった場合、つまり、例えば $f(x, y)$ を考えてみます。それぞれの変数で微分することを偏微分と言い、偏微分された関数を偏導関数と呼び、 x, y それぞれの変数で偏微分したものを $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ や f_x , f_y などとあらわします。

偏微分を含む方程式のことを偏微分方程式と呼びます。つまり、偏微分（偏導関数）は、次の極限で定義されます：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

変数を増やすことで格段に表現力が増えます。例えば、一つの変数を時間変数 t 、一つの変数を空間変数 x 、にすることで時空間に広がりを持った現象をモデル化することができます。

微分方程式（または偏微分方程式）においては、初期値問題というものを考えることがあります。漸化式を

考えたときに、 a_1 の値が与えられて、数列の値が帰納的に決まっていたのと概ね同じような話です。例えば、もっとも単純な微分方程式

$$f'(t) = a$$

を考えます。ここで a は定数です。この微分方程式は、解 f は、一定速度 a で動く物体の位置をあらわすと考えることができます。速度がわかっているの、物体の初期時刻での位置 $f(0)$ がわかっているれば、時刻 t での位置がわかるはず。実際、初期値 $f(0) = C$ として、微分方程式の両辺を 0 から t まで積分すると、

$$f(t) = C + at$$

となり解が求まります（等速直線運動の式をあらわしています）。このように、微分方程式は、初期条件 $f(0) = C$ とセットになった時、この二つをもって初期値問題と呼び、その解（初期値 C に依存する関数） $f(t)$ を初期値問題の解と呼びます。

次に単純な微分方程式の例として、 a を正の定数として

$$f'(t) = af(t)$$

を考えます。この例は、マルサスの人口モデルや個体数モデルと呼ばれるものです。1798年にトマス・マルサスに導入されたモデルです。関数 f は、生物の個体数の時間変化を表しています。この微分方程式を説明すると、生物の増え方（左辺）は、生物の数（右辺）に比例する、という非常に単純な現象を述べたモデルです。ここでも解くのは、初期値問題とします。つまり $f(0) = C$ が与えられているとします。個体数の増加の仕方が分かっているモデルにおいて、初期時刻での個体数がわかっているれば、自然に任意の時刻での個体数がわかるはず。それを数学的に確かめていきます。この方程式の解法も説明しておきます（今後も同じような方法を繰り返し使います）。いわゆる変数分離と呼ばれる方法（を説明のために改変した方法）で

す。 f を正の値を取る関数だと思って、両辺を f で割ってみます。すると、

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = a$$

と書けます。ここで、左辺は「 $\log f(t)$ を微分したものの ($f > 0$ としていたので)」とみなすことができるので、

$$\frac{d}{dt}(\log f(t)) = a$$

となります。これを両辺 t で積分すると、

$$\log f(t) = at + C$$

(C は積分定数) を得ます。最後に両辺の指数を取ると、

$$f(t) = Ce^{at}$$

と書けます。ちなみに、モデルの都合上 a を正の定数としましたが、正である必要はありません。形式的に求めた解 Ce^{at} ですが、実際に解であることを確かめるには、方程式に代入して両辺等しくなっていることを確かめればよく、もちろん実際に解になっています。

個体数モデルについて、もう少し説明を加えます。マルサスのモデルでは、その個体数が指数関数的に永久に増大していくことを結論付けています。しかし、これは不自然な部分もあります。確かに、個体数が多い方がその分だけ増大しやすそうですが、限度があるはずで、それを考慮したのが次のロジスティックモデルです。 a , N を正の定数として

$$f'(t) = af(t)(N - f(t))$$

という微分方程式です。マルサスのモデルに対して右辺に $(N - f(t))$ という因子が掛かっています。これにより、 $f(0) = C \in (0, N)$ として、生物の増え方 (左辺) は、 f が N に近づくにつれて小さくなり、 $f(t) = N$ の時点で増えなくなります。このモデルも解くことができます (ここで、「解ける」というのは、解が具体的に書ける、という意味で使っています)。実際に、さきほどのマルサスのモデルに対する方法と同様の方法で解いてみます。ここでは初期データを

$$f(0) = C$$

とします。

形式的に

$$\frac{f'(t)}{f(t)(N - f(t))} = a$$

と書けます。ここで、左辺を部分分数分解すると

$$\frac{1}{f(N - f)} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{N - f} \right)$$

となるので、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N} \log \frac{f(t)}{N - f(t)} \right) = a$$

が得られます。

先ほどと同様に、両辺 t で積分し、両辺の指数を取ると、

$$\frac{f(t)}{N - f(t)} = e^K e^{aNt}$$

となります。ただし K は積分定数です。

次に、初期条件 $f(0) = C$ を用います。 $t = 0$ を代入して K を決定すると、

$$\frac{f(t)}{N - f(t)} = \frac{C}{N - C} e^{aNt}$$

を得ます。これを $f(t)$ について解くと、

$$f(t) = \frac{N}{1 + \frac{N - C}{C} e^{-aNt}}$$

となります。

この解の形から、時間が大きくなると e^{-aNt} が 0 に近づくので、

$$f(t) \rightarrow N \quad (t \rightarrow \infty)$$

となることが分かります。つまり、個体数は最終的に一定値 N に近づきます。この N は環境収容力と呼ばれ、「その環境で維持できる個体数の上限」を表しています。一方で、初期の段階では $f(t)$ が小さいため、ほぼ指数関数的に増加し、その後ゆるやかに増加が抑えられていく様子がこのモデルから読み取れます。

もう一つ別の例を見てみます。ロジスティックにおいて右辺を $f^2(t)$ としたモデルで、

$$f'(t) = f(t)^2$$

という方程式です。以下便宜上、これを「爆発モデル」と呼ぶことにします。ただし、これは一般的な名称ではありません。

たとえば生物の増え方で説明しようとする、「生物の増え方が、現在の生物数の二乗に比例する」という状況です。あまり現実的な状況ではありませんが、個体どうしの出会いや相互作用によって増殖が起こると考えると、個体数が多いほど出会いの回数は急激に増えるので、このような式が現れると考えることもできます。マルサスのモデルでは、増え方は個体数に比例するだけでしたが、このモデルでは右辺に二乗が現

れるため、増え方はそれよりもずっと激しくなります。このように、「現象についてどのような仮定を置くか」によって、現れる微分方程式の形が変わり、そこから将来の振る舞いの違いまで読み取れるところに、微分方程式によるモデル化の面白さがあります。

実際に、この方程式もこれまでと同じように解くことができます。初期値を $f(0)=C$ とします。上の二つの微分方程式と全く同じように解くと、

$$f(t) = \frac{C}{1-Ct}$$

という形になります。

この解を見ると、 t が $\frac{1}{C}$ に近づくにつれて分母が0に近づくため、

$$f(t) \rightarrow \infty \quad \left(t \rightarrow \frac{1}{C} - 0\right)$$

となります。このような現象を、微分方程式の解の「爆発」と呼びます。一方、 C が負の場合、任意の0以上の時刻において、解の爆発は起こらず、

$$f(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成り立つことがわかります。

マルサスのモデルは「永久に指数関数的に増える」ことを示し、ロジスティックモデルは「やがて一定値に近づく」ことを示し、この爆発モデルは「(初期値が正であれば) 有限時間で爆発する」ことを示します。このように、微分方程式は単に式を解くだけのものではなく、現象についての仮定を数式に翻訳し、その仮定からどのような未来が導かれるかを考えるための道具でもあります。

2. 輸送方程式

これまででは、時間とともに「量」そのものがどのように変化するかを見るために、常微分方程式によるモデルを考えてきました。量が時間変化するだけでなく、空間的な現象を記述できる偏微分方程式を考えます。たとえば、水の流れに乗って物質が運ばれる現象や、道路上で車が進んでいく様子などがその例です（つまり車両の粗密です。車両は本来離散的に配置していますが、それをあえて連続的にとらえることで得られるモデルです）。

このような「形をあまり変えずに、空間の中を移動していく」現象を記述するモデル方程式として、次は

輸送方程式を考えます。これは、ある量が速度 c で一定方向に運ばれていく様子を表す方程式で、もっとも基本的な偏微分方程式の一つです。

具体的には、位置 x と時刻 t に依存する関数 $u(t, x)$ を考え、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

という形の方程式を扱います。この式は、「時間変化」と「空間方向の変化」とがつり合っていることを表しており、結果として、 u のグラフは形を保ったまま、速度 c で平行移動していきます。ここでも、微分方程式の時と同様に、初期値問題を考えます。ただ、微分方程式とは異なり、時刻0での値ではなく、時刻0での x を変数とする関数 $f(x)$ を与えます。つまり、

$$u(0, x) = f(x)$$

が与えられているとします。偏微分方程式と初期データ（初期関数）をもって、偏微分方程式の初期値問題と呼びます。簡単のため、 f は滑らかな関数（何回でも微分ができるような、都合のいい関数）とします。この初期値問題の解は

$$u(t, x) = f(x - ct)$$

という形で与えられます。実際に、合成関数の微分によって、

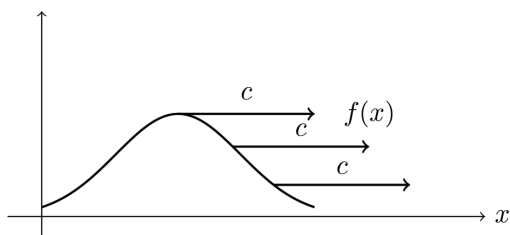
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = (-cf'(x-ct)) + cf'(x-ct) = 0$$

となり、確かにこの関数は方程式を満たしていることが分かります。この式から、初期の形がそのまま保たれつつ、時間とともに x 軸方向に移動していく様子が読み取れます（[【図1】](#) 参照）。例えば、無限に伸びた道路の上を走る車両は、全体が一定速度で走っていれば事故も起こらず、同じ形を保ったまま走り続ける様子がこの解から読み取れると思います。

疑問として、速度 c が一定でない場合、事故は起こるのでしょうか。以下では、それを考えていきます。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ここで、 $c(u)$ は、 u を変数とする関数であり、 $c'(u) \neq 0$ （定数でない）とします。さらに簡単のために u が正のとき、 $c'(u) > 0$ とします。例えば、定数 $p > 0$ について $c(u) = u^p$ や $c(u) = u^p + 1$ が典型例です。ただし、 u を車両の密度とみなすと、 $c(u) = u + 1$ は「車両の密度が高いほど車両の速度が速い」という



【図 1】 各点が速度 c で右向きに移動する様子

状況を表しており、現実の道路をそのまま表すモデルというより、事故の起こりやすさを説明するための極端な例になっています。実際、【図 2】、【図 3】で示しているように、 $c(u)=u+1$ とすると、山（密度分布）の高い位置ほど波の進行速度が速くなります。そのため、山の高い部分ほど速く進み、低い部分ほどゆっくり進むので、時間がたつにつれて波の形はしだいにくずれていくはずですが、そして、さらに時間がたつと、波が完全に直立すると予想できます。波が直立すると、そこで解の x 偏微分ができなくなります。その意味で、なめらかな解ではいられなくなるので、これも解の爆発と呼ぶことにします。

つまり、車両の粗密の話でいえば、後ろを走る車が前の車よりも速いために、前の車に追いついてしまう、という状況です。一方で、事故は必ずしも起こるわけではありません。初期の波が単調増加な関数の場合には、【図 4】で示されるように、密度の高い位置（波の速い位置）が前方にあるので、前方ほど速く進むことになります。そのため、波が立ち上がることはなく、むしろ傾きはしだいにゆるやかになると予想されます。

これらの議論は、あくまで図から想像される解の描像にすぎません。ここでは、それを数学的に説明していきます。そのために、特性曲線の方法と呼ばれるものを解説します。つまり、

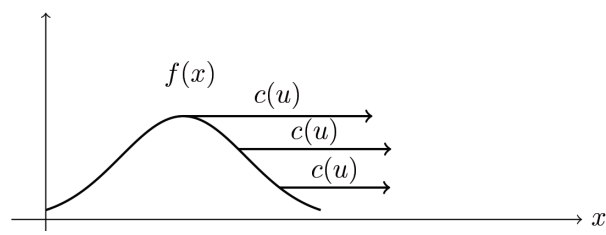
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を考えます。特性曲線とは (t, x) 平面の中で、解 $u(t, x)$ の値がどのような曲線に沿って運ばれていくかを表す曲線です。そこで t を媒介変数とする曲線

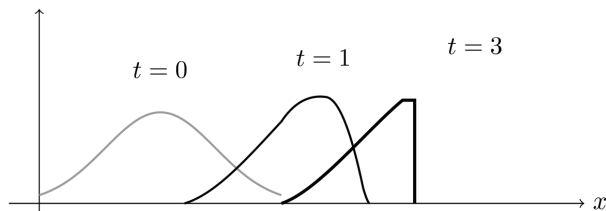
$$x = x(t)$$

を考え、この曲線に沿って $u(t, x(t))$ がどのように変化するかを調べます。合成関数の微分法により、

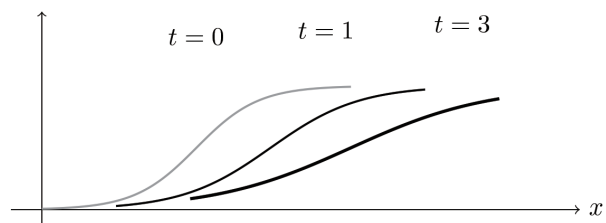
$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))$$



【図 2】 $c(u)=u+1$ の場合の模式図：全体が右へ進みつつ、高い部分ほど速く進む



【図 3】 $c(u)=u+1$ ：右へ進みながら波形が崩れ、やがて立ち上がる



【図 4】 単調増加な初期データ：右へ進みながら傾きがゆるくなる

が成り立ちます。

ここで、もし

$$x'(t) = c$$

となるように曲線 $x(t)$ を選べば、

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))$$

となります。ところが、 u は輸送方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を満たしているので、

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = 0$$

を得ます。

つまり、 $x'(t)=c$ を満たす曲線に沿っては、 u の値は一定です。このような曲線を、この方程式の「特性曲線」と呼びます。

さて、

$$x'(t) = c$$

を解くと、

$$x(t) = ct + x_0$$

となります。ただし、 x_0 は積分定数です。したがって、特性曲線は

$$x - ct = x_0$$

という直線になります。

特性曲線に沿って u は一定であるから、

$$u(t, x) = u(0, x_0)$$

が成り立ちます。ここで

$$x_0 = x - ct$$

であることに注意すると、

$$u(t, x) = u(0, x - ct)$$

を得ます。初期データを考慮すると、

$$u(t, x) = f(x - ct)$$

となります。これは先ほど得ていた解と一致しています。

続いて、時間経過によって解の爆発が実際に起こることを確認してみます。ここでも「特性曲線の方法」を使います。今度は、速度が一定ではなく、

$$c(u) = u + 1$$

で与えられる場合を考えます。このとき方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

となります。解の爆発、波の直立を考えるためには、有限な時間で未知関数 u の x 偏導関数 u_x が発散することを証明すればいいです。

まず、特性曲線を考えます。特性曲線 $x = x(t)$ に沿っての u の変化は

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))$$

で与えられます。ここで

$$x'(t) = u(t, x(t)) + 1$$

と選ぶと、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} u(t, x(t)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + (u(t, x(t)) + 1) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となります。したがって、特性曲線に沿って u の値は一定です。

$t = 0$ において x_0 から出発する特性曲線に沿って積分すると、初期データを考慮して

$$u(t, x(t)) = f(x_0)$$

を得ます。よって、その特性曲線は

$$x'(t) = f(x_0) + 1$$

を満たすので、

$$x(t) = x_0 + t(f(x_0) + 1)$$

と書けます。

次に、波が立ち上がることを u_x の発散を調べることで確かめます。もとの方程式

$$u_t + (u + 1)u_x = 0$$

を x で微分すると、

$$(u_x)_t + \frac{\partial}{\partial x}((u + 1)u_x) = 0$$

となります。積の微分を計算すると、

$$(u_x)_t + (u_x)^2 + (u + 1)(u_x)_x = 0$$

を得ます。

ここで

$$v = u_x$$

とおくと、

$$v_t + (u + 1)v_x + v^2 = 0$$

となります。今、先ほどと同じ特性曲線

$$x'(t) = u(t, x(t)) + 1$$

に沿って見ると、

$$\frac{d}{dt} v(t, x(t)) = v_t + (u + 1)v_x$$

ですから、

$$\frac{d}{dt} v(t, x(t)) = -v(t, x(t))^2$$

が成り立ちます。

これは1変数の微分方程式で先ほどの爆発モデルとほぼ同じ形なので、解くことができます。初期値

$$v(0, x_0) = f'(x_0)$$

として、微分方程式を解くと

$$v(t, x(t)) = u_x(t, x(t)) = \frac{f'(x_0)}{1 + tf'(x_0)}$$

を得ます。

ここで、ある点 x_0 において

$$f'(x_0) < 0$$

であるとします。このとき、時刻

$$t_* = -\frac{1}{f'(x_0)} > 0$$

において分母が0になるので、

$$u_x(t, x(t)) \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow t_* - 0)$$

となります。つまり、初期値が減少している部分では、解そのもの u は有限のままであっても、その傾き u_x

は有限時間で発散してしまいます。これが、波がしだいに前方で立ち上がり、ついには解の爆発が起こることを意味しています（ただし、厳密には、実際に波が立ち上がっている）。一方で、初期データ f が任意の x について $f'(x) \geq 0$ 、つまり単調増加の場合、上記 u_x の右辺の分母は 0 になることはなく、

$$u_x(t, x(t)) = \frac{f'(x_0)}{1 + tf'(x_0)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

ということがわかり、時間経過とともに、解の x 偏導関数が 0 へと近づき、密度分布の傾きが時間とともに緩やかになることがわかります。

このような解析自体は、20 世紀前半（1900 年代前半）には、すでに知られていたと思われます。その後、Richard Courant（クーラン）、Kurt Friedrichs（フリードリクス）、Peter Lax（ラックス）らによって理論の拡張が行われました。次の節では、その歴史について簡単に解説しつつ、その後の進展に触れます。

3. その後の発展、特に一般化、衝撃波、弱解

これまで見てきた

$$u_t + c(u)u_x = 0$$

のような方程式は、未知関数が 1 つだけでした。しかし、現実の現象をより正確に記述しようとする、複数の量が同時に変化する場合は考える必要があります。たとえば、流れの密度だけでなく速度も互いに影響し合いながら変化します（例えば、密度が高い位置、車両が混んでいる位置では、速度が遅くなる、など）。このようなモデルを考える場合、未知関数 u を 1 個だけでなく、2 個、3 個と増やすモデルを考えることが自然になります。未知関数が 2 個 u_1, u_2 の場合、それを並べてベクトル $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を作り、これを解とする偏微分方程式として

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} F_1(u_1, u_2) \\ F_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えることができます。ここでベクトル関数の偏微分は、それぞれの成分を偏微分することをあらわし、 F_1, F_2 それぞれ (u_1, u_2) を変数とする関数です。このような方程式は、輸送方程式系とか双曲型保存則系と呼ばれます（実際は、 F_1, F_2 に適切な仮定をする必要があ

りますが、ここでは触れません）。未知関数が 2 個の場合、行列の対角化とさきほどの特性曲線の方法を組み合わせ、Lax によって解の爆発が起こる条件が解明されました²⁾。未知変数を n 個（任意自然数個）にした場合、問題を解決したのが John（ジョン）です³⁾。未知関数が複数になったことによる難しさは、未知関数同士の相互作用を考える必要があります、特に未知関数が 1 個の場合のように、解を明示的に書く方法がないためです。単純そうに見えますが、近年でも盛んに研究されており、新しい論文が発表されています。

その他の興味深い問題としては、解の爆発が起きたあとの解について考えることです。解の爆発が起きると、もはやそれまでのようななめらかな解ではいられなくなります。その後には、不連続な解が現れることがあります、これを**衝撃波**と呼びます。これは密度分布の急激な変化を表すものであり、物理における衝撃波とも整合性のとれた概念になっています。しかしながら、このような不連続な関数は通常の意味では偏微分できないので、そのままでは偏微分方程式の解と呼んでいいのか不明なものに見えるかもしれません。そこで、**弱解**という概念を導入することで、このような不連続な関数も解として扱うことができるのです。詳しい理論は、偏微分方程式の一般的な教科書である Evans（エヴァンス）¹⁾を参照してください。

参考文献

- 1) L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, 2010.
- 2) P. D. Lax, *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, J. Math. Phys. **5** (1964), 611–613.
- 3) F. John, *Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 377–405.