株価の「ジャンプ」と金融リスク管理

―― レヴィ過程とマリアヴァン解析への招待 ――

東京理科大学 経営学部 ビジネスエコノミクス学科 准教授 鈴木（すずき） 良一（りょういち）

1　はじめに

2008 年 9 月 15 日，リーマン・ブラザーズの破綻をきっかけに世界金融危機が勃発しました．日経平均株価は前日比で約 5% 下落し，同年 10 月 16 日には 1 日で約 11% もの下落を記録しています．このような「急落」や「暴騰」は，災害や政治・経済的な出来事等が要因となり標準的な理論が予測するよりも頻繁に起こっています．現代金融理論の礎となっている Black-Scholes 理論（以降，BS）[5]は，株価の変動をブラウン運動（時間とともに連続的に揺らぐ確率過程）によってモデル化します．1973 年に Fischer Black と Myron Scholes によって発表され，後に Scholes（Robert Merton と共に）は 1997 年にノーベル経済学賞を受賞しました．しかし，ブラウン運動は連続な経路を持つため，株価が「跳ぶ」ことを表現できません．

身近な例で考えると，天気予報で「明日の気温は 20 度前後でしょう」と言うとき，私たちは気温が 19 度から 21 度へなめらかに変化すると想像します．しかし実際の株価は，地震のように**突然**大きく動き，過去の連続的なデータだけでは予測できない断層のズレのような現象が起きます．従来の理論（BS モデル）は「気温の変化」には強いですが，この「断層のズレ」を扱えないのです．

本稿では，**数理ファイナンス**（金融の不確実性を確率と数学で扱う分野）の世界をご紹介します．特に，株価の急激な変動を捉える**ジャンプ過程**（不連続な跳びを許す確率過程）と，リスク管理の強力な手法である**マリアヴァン解析**（確率過程を「微分」して感度を調べる手法）について概要をお伝えします．

本稿の見取り図：まず請求権（オプション）の価格付けとヘッジの基本を整理し（第 2 節），完備市場の代表例として BS モデルを復習します（第 3 節）．次にジャンプ過程と Merton モデルで「突然の変動」を表し（第 4–5 節），非完備市場では完全ヘッジができないため局所的リスク最小化（LRM）のような二次最適化を導入します（第 6–7 節）．最後にマリアヴァン解析（Clark-Haussmann-Ocone 型公式（以降 CHO））でヘッジ比率 ξ_t を具体化し（第 8 節），発展として BNS モデルに触れます（第 9 節）．

数理ファイナンスではデリバティブの価格付け，リスク管理，確率モデルの構築など多岐にわたるテーマが研究されています．本稿では，このうち**ジャンプ過程によるモデリング**と**マリアヴァン解析を用いたヘッジ戦略**に焦点を当てます．なお，科学フォーラム 449 号では家田雅志先生がポートフォリオ最適化と深層学習を平易に解説しており[9]，本稿はこれと補完的な内容です．

2　請求権の価格付けとヘッジ

2.1　基本的な考え方

金融市場では，投資家は将来の不確実な支払いを約束する金融商品（**請求権**）を売買します．身近な例では火災保険がこれにあたり，「保険料はいくらが適正か？」（価格付け）と「保険会社はどう備えるべきか？」（ヘッジ）が基本問題です．

モデル設定：

- **危険資産**（S）：株式など，価格が上下する資産
- **安全資産**（B）：預金のように確実に増える資産（$B_t = e^{rt}$）
- **請求権**（H）：満期 T に価値が確定する金融商品

2.2　同値マルチンゲール測度とリスク中立確率

以下では**条件付き期待値** $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ を多用します．これは「時刻 t までの情報 $\mathcal{F}_t$ がわかっているとき，X の期待値はいくらか」を表す量です．例えばサイコロを 2 回振り合計を X とすると，振る前は $\mathbb{E}[X]=7$ ですが，1 回目に 4 が出た後は $\mathbb{E}[X|1回目=4]=7.5$ となります．

金融商品の「適正価格」を決める鍵が同値マルチンゲール測度（EMM）[*1] です．マルチンゲール[*2] とは「公

＊1　元の確率と同値で，割引資産価格がマルチンゲールになる確率測度（リスク中立測度）．

＊2　条件付き期待値 $\mathbb{E}[X_{t+s}|\mathcal{F}_t]=X_t$ が成り立つ「フェアゲーム」型の確率過程．

平なゲーム」を表す概念です．

リスク中立確率測度 $\mathbb{P}^*$ とは，割引後の株価 $e^{-rt}S_t$ がマルチンゲールになる確率測度です：

$$\mathbb{E}^*[e^{-rt}S_t|\mathcal{F}_s]=e^{-rs}S_s,\quad t>s.$$

この測度の下で，オプション価格はリスク中立期待値として

$$V_t=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*[H|\mathcal{F}_t]$$

で与えられます（以下では主に $t=0$ として書きます）．

2.3 無裁定性と完備性

裁定（アービトラージ）とは「リスクなしで確実に儲かる取引」です．効率的な市場では裁定機会は存在しないと仮定します．

資産価格の基本定理：

1. 第 1 定理：市場が無裁定⟺EMM（リスク中立測度）が存在する
2. 第 2 定理：市場が完備⟺EMM が一意に存在する

すなわち，無裁定なら EMM が存在して「正当な価格付け」が可能となり，完備なら価格は一意に決まります．非完備市場では EMM が複数存在し，価格に幅が生じます．

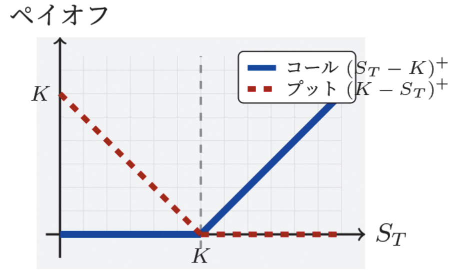
BS モデルは完備なので EMM は一意です．ジャンプがあるモデルは非完備なので EMM が複数存在します．本稿では代表として最小マルチンゲール測度（minimal martingale measure）を採用し，これを $\mathbb{P}^*$ と表します（完備市場ではこの $\mathbb{P}^*$ が唯一の EMM に一致します）．【図 1】にこれらの関係をまとめます．

2.4 ヨーロピアンオプション

最もポピュラーな金融派生商品がヨーロピアンコールオプションです【図 2】：

$$H=(S_T-K)^+:=\max\{S_T-K,0\}. \tag{1}$$

日常の言葉で言うと，「半年後にこの株を 1 万円で買う権利」です．半年後に株価が 1 万 2 千円なら 2 千円の利益，8 千円なら権利を行使しないので損失はゼロ（権利料のみ）．売却する権利はプットオプション $H=(K-S_T)^+$ で，株価下落に備える「保険」として使われます．



【図 2】 オプションのペイオフ

3 完備市場：BS モデル

3.1 株価の数学モデル

時刻 t における株価 S_t の最も基本的なモデルは次の確率微分方程式で与えられます：

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\,\mathrm{d}t+\sigma S_t\,\mathrm{d}W_t,\quad S_0>0. \tag{2}$$

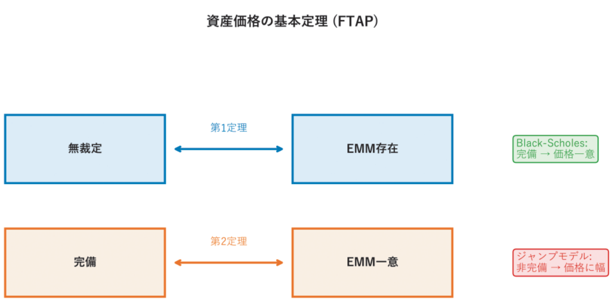
この式の意味：株価の微小な変化は 2 つの部分からなります．

- $\mu S_t\,\mathrm{d}t$：予測可能な成長（年利 μ で増える部分）
- $\sigma S_t\,\mathrm{d}W_t$：予測不能なランダムな揺らぎ

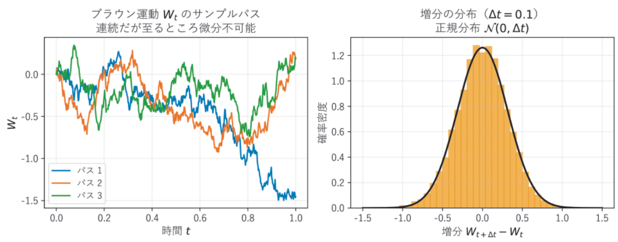
ここで W_t はブラウン運動と呼ばれる確率過程で，花粉微粒子が水中でランダムに動く「ブラウン運動」に由来します．σ は「ボラティリティ」[*3] と呼ばれ，値動きの激しさを表します．

ブラウン運動は，$W_0=0$ からスタートし，増分 W_t-W_s が平均 0・分散 $t-s$ の正規分布に従い，異なる時間区間の増分が独立で，経路は連続だが至るところ微分不可能な確率過程です【図 3】．したがってブラウン運動に基づく株価モデルも連続な経路を持ち，急な上下はありますが「瞬間的に跳ぶ」ことはありません．

この方程式の解は幾何ブラウン運動（GBM）と呼ばれ，【図 4】のような経路を持ちます：

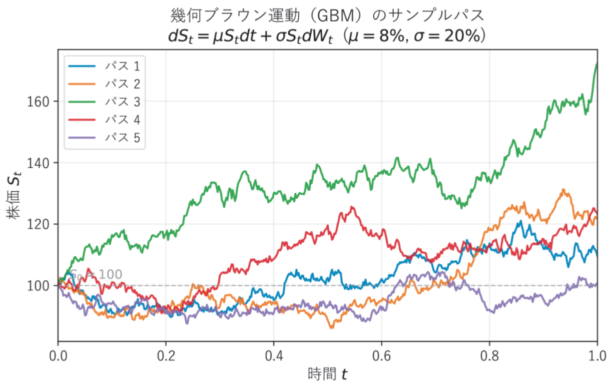


【図 1】 資産価格の基本定理：無裁定・完備性と EMM の関係



【図 3】 ブラウン運動のサンプルパスと増分の分布

＊3 値動きの大きさ（モデル上の標準偏差）．



【図 4】 BS モデル：幾何ブラウン運動のサンプルパス

$$S_t=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right). \tag{3}$$

このモデルでは市場は完備です．「完備」とは，どんな金融商品でも，株と預金を適切に組み合わせることで同じ価値を作り出せる（複製できる）ことを意味します．

3.2 リスク中立確率測度

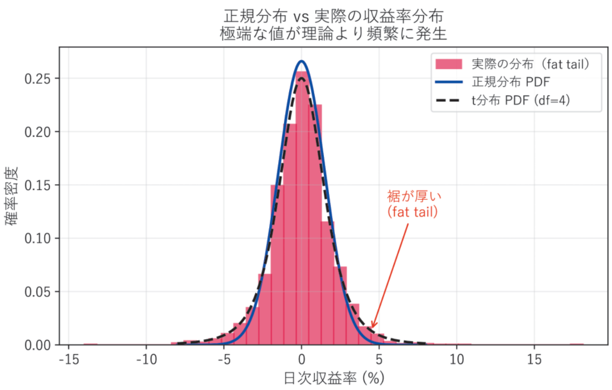
BS モデルでは，第 2 節で述べた $\mathbb{P}^*$ の下で $W_t^*=W_t+(\mu-r)t/\sigma$ がブラウン運動になります（Girsanov の定理）．オプション価格は $e^{-rT}\mathbb{E}^*[(S_T-K)^+]$ で計算されます．一方，ジャンプがあるモデルではリスク中立測度が無数に存在し，「正しい価格」が一意に決まりません．そこで最小マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ など，特定の基準で測度を選びます．

3.3 正規分布の限界

BS モデルでは，株価の日次変動率は正規分布（釣鐘型の分布）に従うと仮定します【図 5】．

問題点：正規分布では，平均から大きく外れた値はほとんど起こらないとされます．日次収益率を R，日次ボラティリティを $\sigma=1.5\%$ とすると，$|R|>10.5\%$（平均から 7σ 離れた値）の確率は約 10^{-12}，つまり 1 兆日に 1 回程度です．

しかし実際には，2008 年 10 月 16 日の約 11% 下落のような事象が数年おきに起きています（「ブラックスワン」）．実際の株価収益率分布は正規分布より裾が厚い（fat tail）：極端な値が理論より頻繁に現れるのです．



【図 5】 正規分布と実際の収益率分布：裾が厚い（fat tail）

4 ジャンプ過程入門

4.1 ポアソン過程：「いつ何回起こるか」のモデル

株価の「ジャンプ」を表現する最も基本的な道具がポアソン過程です．

身近な例：コンビニに 1 時間に平均 6 人来るとき，「次の 1 時間に何人来るか」はランダムです．このような「ランダムな時刻に起こるイベントの回数」をモデル化するのがポアソン過程です．

定義 1（ポアソン過程）．強度 λ のポアソン過程 N_t は，時刻 t までのイベント回数を数える過程で，N_t-N_s は平均 $\lambda(t-s)$ のポアソン分布に従います．

ポアソン分布とは，「一定時間にイベントが k 回起こる確率」を与える分布です：

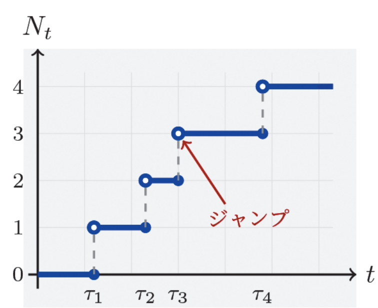
$$\mathbb{P}(N_t=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

例えば $\lambda=2$（1 年に平均 2 回ジャンプ）のとき，1 年間にジャンプが 0 回の確率は約 13.5%，1 回は約 27.1% です．

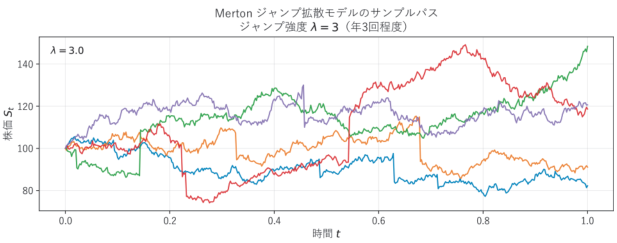
ブラウン運動との決定的な違い：ブラウン運動の経路は連続（途切れのない）ですが，ポアソン過程の経路は【図 6】に示すように階段状です．普段は一定で，ランダムな時刻 $\tau_1, \tau_2, \ldots$ に 1 ずつ「ジャンプ」します．ジャンプ間の待ち時間は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従います．

4.2 複合ポアソン過程とレヴィ過程

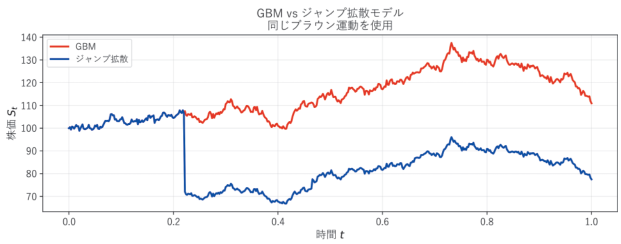
ポアソン過程は「いつジャンプするか」を決めますが，



【図 6】 ポアソン過程：区分的定数でランダムな時刻 τ_i にジャンプ



【図 7】 Merton ジャンプ拡散モデルのサンプルパス



【図 8】 連続モデル（左）とジャンプモデル（右）の比較

「どれだけ動くか」も重要です．複合ポアソン過程 $Y_t=\sum_{i=1}^{N_t} J_i$ は，各ジャンプの大きさ J_i もランダムにしたものです．より一般的な枠組みがレヴィ過程*4 で，連続な揺らぎとジャンプを組み合わせたものです．ジャンプの頻度と大きさはレヴィ測度 ν で特徴づけられます（文献[7]参照）．

5　Merton ジャンプ拡散モデル

5.1 最初のジャンプモデル

1976 年，Robert Merton はブラウン運動にジャンプを加えた株価モデルを提案しました[10]．これが数理ファイナンスにおけるジャンプ拡散モデルの始まりです．Merton モデルの株価過程（積分形）：

$$S_t=S_0+\int_0^t \mu S_{s-}\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma S_{s-}\mathrm{d}W_s+\sum_{i=1}^{N_t} S_{\tau_i-}(e^{J_i}-1). \quad (4)$$

ここで N_t は強度 γ のポアソン過程，τ_i はその第 i 回目のジャンプ時刻，J_i は平均 m，分散 δ^2 の正規分布に従うジャンプサイズ，S_{t-} は時刻 t のジャンプ直前の株価（左極限）です．ジャンプ時刻 τ_i では $S_{\tau_i}=S_{\tau_i-}e^{J_i}$ となります．モデルの 3 つの変動要因はそれぞれ，平均的な成長（$\mu\mathrm{d}t$），日常的な変動（$\sigma\mathrm{d}W_t$），突発的なジャンプ（$e^{J_i}-1$）を表します．【図 7】に Merton モデルのサンプルパスを示します．

Merton モデルでもマリアヴァン解析を用いて LRM 戦略を明示的に導出できますが[1,3]，本稿ではより一般的な BNS モデルでの結果を第 9 節で紹介します．

6　ジャンプがあると市場はなぜ非完備か

6.1 完備性の直感

BS モデルでは，株価の変動はブラウン運動だけで表されるため，株と預金を連続的に取引することであらゆる請求権を完全に再現できます（完備市場）．しかしジャンプは予測不能で連続取引では追従できません．例えば「株価が突然 20% 下落する」イベントは，どんなに頻繁に売買しても完全には相殺できず，市場は非完備になります【図 8】．

6.2 最小マルチンゲール測度

非完備市場ではリスク中立測度が無数に存在します．その中からどれを選ぶかが価格付けとヘッジの核心です．

本稿では最小マルチンゲール測度（minimal martingale measure）[3]を採用します．これは「ジャンプに関するリスクプレミアムをゼロにする」自然な選択であり，二次ヘッジ理論と整合します．

7　非完備市場でのヘッジ：LRM

7.1 ヘッジの基本的な考え方

ヘッジとは，リスクを相殺することです．例えばオプションを売った場合，株を適切に保有することで損失を相殺できます．時刻 t のポートフォリオは $V_t=\xi_t S_t+\eta_t B_t$（株 ξ_t 単位＋預金 η_t 単位）です．第 6 節で述べたように，非完備市場では完全ヘッジが不可能なため，「できるだけリスクを小さくする」発想に切り替えます．

7.2 局所的リスク最小化（LRM）

局所的リスク最小化は「各時点でのリスクを最小にする」戦略です：

$$\min_{\varphi}\mathbb{E}[(C_T-C_t)^2|\mathcal{F}_t]. \quad (5)$$

ここで $\varphi=(\xi,\eta)$ はヘッジ戦略，C_t は「追加で必要になった資金」（コスト）です．LRM はこのコストの変動（分散）を最小化します．補足：LRM は二次ヘッジ（quadratic hedging）の代表例で，非完備市場で「ヘッジ誤差の二乗平均」を小さくする考え方です．

＊4　独立かつ定常な増分をもち，ブラウン運動やポアソン過程を含む確率過程のクラス．

8　マリアヴァン解析

8.1「もしも」を数学的に扱う

マリアヴァン解析は，確率的な量を「微分」する数学的手法です[11]．レヴィ過程への拡張は[8]で詳しく扱われています．

直感的な説明：サイコロを振って出た目の 2 乗 $F=X^2$ を考えます．「もしサイコロの目が少し違っていたら，F はどう変わっていたか？」に答えるのがマリアヴァン微分です．これはオプション価格の基礎資産価格に対する感度（デルタ）やボラティリティに対する感度（ベガ）を確率論的に厳密に定義したものと解釈でき，最適なヘッジ戦略の導出に直結します．

8.2 マリアヴァン微分

$F=f(W_{t_1},\ldots, W_{t_n})$（ブラウン運動の汎関数）に対し，マリアヴァン微分 D_tF は次のように定義されます：

$$D_tF=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1},\ldots, W_{t_n})\mathbb{1}_{[0,\,t_i]}(t). \tag{6}$$

これは「時刻 t でブラウン運動を少し動かしたら，F がどれだけ変わるか」という感度を表します．

8.3 CHO 公式

マリアヴァン解析の最重要結果の一つが CHO 公式です：

$$F=\mathbb{E}[F]+\int_0^T\mathbb{E}[D_tF|\mathcal{F}_t]\mathrm{d}W_t. \tag{7}$$

この公式の意味：任意の確率変数 F は，「平均値」+「ブラウン運動に関する積分」に分解でき，積分の中身 $\mathbb{E}[D_tF|\mathcal{F}_t]$ がマリアヴァン微分から計算できます．オプション H のヘッジに必要な保有量 ξ_t を CHO 公式が明示的に与えてくれます．連続モデル（BS）では偏微分方程式でヘッジ比率が得られますが，経路依存型のオプションやジャンプがある非完備市場等ではそのアプローチが困難になり，CHO 型公式が有効な手段となります．

8.4 ジャンプ過程への拡張

ジャンプがあるモデルでは，公式が次のように拡張されます：

$$F=\mathbb{E}[F]+\int_0^T\mathbb{E}[D_tF|\mathcal{F}_{t-}]\mathrm{d}W_t + \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{E}[D_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z). \tag{8}$$

ここで $\mathbb{R}_0:=\mathbb{R}\setminus\{0\}$（0 を除く実数全体），$\nu$ はレヴィ測度，$N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ はジャンプの計数測度で，

$$\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z):=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)-\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$$

は補償ポアソン測度[*5]です．第 2 項がブラウン運動への感度，第 3 項がジャンプへの感度で，マリアヴァン差分 $D_{t,z}F$ は「サイズ z のジャンプが起きたら F がどう変わるか」を表します．

9　発展的内容：BNS モデル

より現実的なモデルとして Barndorff-Nielsen and Shephard（BNS）モデル[4]を紹介します．

9.1 BNS モデルの特徴

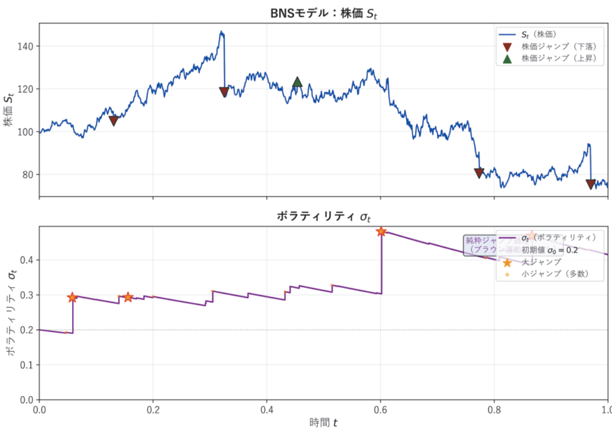
BNS モデルの革新的な点は，ボラティリティ過程が純粋ジャンプ過程で駆動されることです．【ボラティリティ過程】：

$$\mathrm{d}\sigma_t^2=-\lambda\sigma_t^2\mathrm{d}t+\mathrm{d}H_{\lambda t}. \tag{9}$$

ここで $\lambda>0$ はボラティリティの平均回帰速度（第 4 節のポアソン強度とは別の量），H_t は従属過程（subordinator；純粋ジャンプの増加過程）です．ボラティリティは H_t のジャンプで瞬時に上昇し，その後指数的に減衰します．【株価過程】：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_t=S_{t-}\left(\mu\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}W_t+\displaystyle\int_{\mathbb{R}_0}(e^{\rho z}-1)N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\right),\\ S_0>0.\end{cases} \tag{10}$$

ここで ρ はジャンプサイズ z が株価に与える影響の強さを表すパラメータです（しばしば $\rho<0$ として，価格下落とボラティリティ上昇が同時に起こりやすい状況を表現します）．【図 9】（下段）をご覧ください．ボラティリティが突然跳ね上がった後（ジャンプ），徐々に沈静化していく（指数減衰）様子が見て取れます．これは市場がショックを受けた後，しばらく不安定な状態が続く「ボラティリティ・クラスタリング」の性質をよ



【図 9】　BNS モデル：株価（上）とボラティリティ（下）の同時変動

＊5　ジャンプ測度から平均成分（補償項）を引いたもの（期待値 0 のジャンプノイズ）．

く表しています．

9.2 BNS モデルでの LRM 戦略

第 5 節で述べた Merton モデルと同様に，BNS モデルでもマリアヴァン解析により LRM 戦略が明示的に導出されます[1, 2, 3]．ここで，簡単のため金利は 0 とします．プットオプション$(K-S_T)^+$に対する LRM 戦略：

$$\xi_t^{\mathrm{put}}=\frac{\sigma_t^2 I_1^{\mathrm{put}}+I_2^{\mathrm{put}}}{S_{t-}(\sigma_t^2+C_\rho)}. \tag{11}$$

ここで $C_\rho=\int_{\mathbb{R}_0}(e^{\rho z}-1)^2\nu(\mathrm{d}z)$ はジャンプの二乗変動，I_1^{put}，I_2^{put} は以下の条件付き期待値です：

$$I_1^{\mathrm{put}}=\mathbb{E}^*[-\mathbb{1}_{\{S_T<K\}}S_T|\mathcal{F}_{t-}], \tag{12}$$

$$I_2^{\mathrm{put}}=\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{E}^*[(K-S_Te^{\rho z})^+-(K-S_T)^+|\mathcal{F}_{t-}]\times(e^{\rho z}-1)\nu(\mathrm{d}z). \tag{13}$$

コールオプション$(S_T-K)^+$に対する LRM 戦略：プット・コール・パリティの関係から，$\xi_t^{\mathrm{call}}=1+\xi_t^{\mathrm{put}}$ が成り立ちます．すなわち，コールのヘッジ戦略はプットの戦略に 1 を加えたものです．

Merton モデルと BNS モデルの違いは次の通りです．

・Merton モデル：σ は定数 $\Longrightarrow$ I_1^{put}，I_2^{put} の計算が比較的容易

・BNS モデル：σ_t が確率的 $\Longrightarrow$ 条件付き期待値に σ_t の情報が入り，計算が複雑化

9.3 モデル比較

	BS	Merton	BNS
株価ジャンプ	なし	あり	あり
ボラティリティ	一定	一定	確率的
クラスタリング†	なし	なし	あり
市場完備性	完備	非完備	非完備

† クラスタリング：大きな変動の後に大きな変動が続きやすい現象．

10　おわりに

本稿では，株価の急激な変動を捉えるジャンプ過程と，リスク管理に用いるマリアヴァン解析をご紹介しました．BS 理論は「滑らかな」変動しか扱えませんが，ジャンプ過程により「突然の変動」を数学的に表現でき，その結果として市場は非完備となり完全ヘッジは不可能になります．マリアヴァン解析（CHO 型公式）はこの状況で最適な（次善の）ヘッジ戦略を明示的に導出する強力な手法です．

数値計算について：本稿で導出した LRM 戦略の式には条件付き期待値が含まれており，実際の計算には数値的手法が必要です．レヴィ過程の特性関数を用いた FFT[6]により，$O(N\log N)$の計算量で効率的に評価できます．

今後の展望：加法過程への一般化，粗いボラティリティ（Rough volatility）モデル，Deep Hedging（機械学習によるヘッジ）など，確率論・偏微分方程式・数値解析・機械学習が交差する現代数学の最前線で発展が続いています．

参考文献

1） T. Arai, Y. Imai, R. Suzuki, *Int. J. Theor. Appl. Finance* **19**（2016），1650008.
2） T. Arai, Y. Imai, R. Suzuki, *Finance Stoch.* **21**（2017），551–592.
3） T. Arai, R. Suzuki, *Int. J. Financial Eng.* **2**（2015），1550015.
4） O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard, *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **63**（2001），167–241.
5） F. Black, M. Scholes, *J. Political Economy* **81**（1973），637–654.
6） P. Carr, D. Madan, *J. Computational Finance* **2**（1999），61–73.
7） R. Cont, P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
8） G. Di Nunno, B. Øksendal, F. Proske, *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Springer, 2009.
9） 家田雅志，ポートフォリオ最適化と深層学習，『理大 科学フォーラム』2025 年 10 月号（通巻 449 号），特集「ビジネスエコノミクスの実践」.
10） R. C. Merton, *J. Financial Economics* **3**（1976），125–144.
11） D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 2nd ed., Springer, 2006.