SPECIAL ISSUE

グラフの「綺麗な」実現

東京理科大学　理学部第一部　数学科　助教　梶ヶ谷　徹（かじがや　とおる）
（2026 年 3 月 31 日現在）

1 はじめに

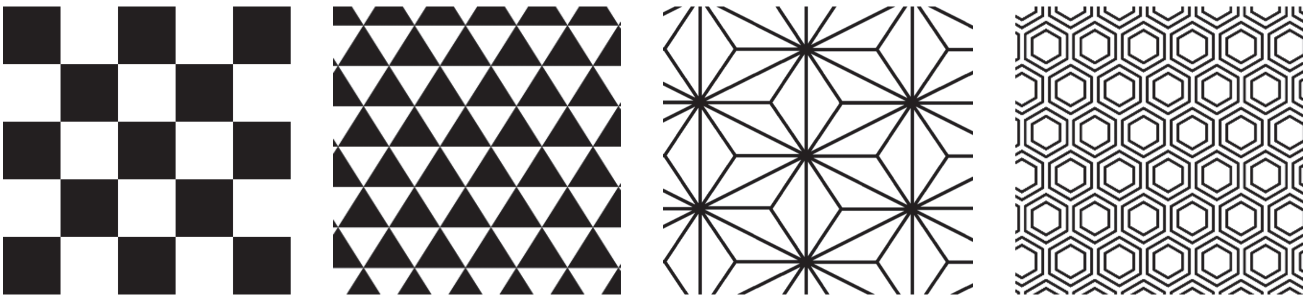
私たちの身の回りには，規則的に並んだものがたくさんあります．机の配置，床や天井のタイル，服や絨毯の柄，サッカーボールの縫い目，壁画，紋様など，同じパターンが規則的に現れる様子は，どういうわけか私たちには「綺麗」に見え，古くから文化の違いを超えて親しまれているように思えます【図 1】．その心理的な理由について説明をすることはできませんが，本稿では，私たちの身の回りにあるそのような規則的なパターンに見え隠れする数学について，幾何学の立場から紹介をしてみようと思います．なお，直感的なわかりやすさを優先するために，（数学的に）曖昧さのある表現をしている箇所があることを断っておきます．

2 周期性・対称性

「規則的に並ぶ」とはどういうことでしょうか．例えば，直線上に点を「規則的に」配置していくには，等間隔に点を配置していくことが最も単純な規則と考えられます．数学ではこの規則を**周期性**と言います．同じように，平面上に点を規則的に配置するには，今度は二方向に周期性を持つように点を配置することが最も単純な方法です．例えば，xy 平面において，格子点（座標が整数である点）に点を配置すれば，これは x 軸，y 軸それぞれの方向に周期性のある点配置です．一般に，平面の場合には，どの二方向に関して点を周期的に配置していくかによって，得られる点配置のパターンが変わる，ということに注意しましょう．数学的に言えば，平行でない 2 つの平面ベクトル e_1，e_2 を勝手に取り，整数 m，n に対して，$v=me_1+ne_2$ と表されるベクトルの終点に点を配置することで，e_1 方向と e_2 方向に周期性を持つ点の配置が得られます．このような点配置のことを（平面上の）**格子**と呼びます．

別の言い方をすると，平面上の格子とはベクトル e_1，e_2 の張る平行四辺形を二方向に平行移動して周期的に並べたものと見ることができます．もしこの平行四辺形に上下左右に繋がる絵柄が描かれていれば，これを周期的に並べることで規則的に並んだ平面的な絵柄が出来上がることになります．例えば，【図 1】の紋様はすべてそのようにして得ることができます．

この平行移動に関する周期性のことを**並進対称性**と呼ぶことがあります．このような「対称性」には他にもいくつかの種類があります．小学校や中学校で，図形をある直線に関して折り返したとき，その形が変わらないことを「線対称」，ある点に関して 180° 回転したとき形が変わらないことを「点対称」と呼びました．数学では，「直線に関する折り返し」や「回転」のことを平面上の**変換**と呼びます．平行移動や折り返し，回転は，図形の長さや角度を変えない変換になっていて，このような変換のことを平面上の**合同変換**と呼びます．つまり，並進対称性や線対称，点対称という考え方は，「合同変換によって形が変わらない」と言う性質として一般化することができます．私たちは，そのような性質を持つ平面上のパターンに対して，無意



【図 1】 周期性・対称性のある日本の伝統的な紋様．人気漫画や東京オリンピックのロゴなどのデザインにも使用されている（画像は Wikipedia より転載）．

識的にその対称性を認識して綺麗だと感じているのです.

3 合同変換群と離散部分群

以上に述べたことを数学的に少しきちんと定式化しておきましょう.まず,「平面」とはいわゆる座標平面 R^2 のこととし,その上の変換とは R^2 の元を R^2 の元にもれなく1:1の対応で写す(つまり全単射な)写像 $f:R^2\to R^2$ のこととします.平面上の合同変換には次のものがあります.

・平行移動
・直線に関する折り返し(鏡映)
・ある点を中心とする回転

合同変換全体のなす集合を $I(R^2)$ と書くことにすれば,$I(R^2)$ の元たちは次の性質を満たすことがわかります.

(0) $f, g\in I(R^2)$ に対して合成写像 $f\circ g$ もまた $I(R^2)$ の元である.
(1) 結合法則:$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ が成り立つ.
(2) 単位元の存在:恒等写像 $id(x)=x$ は合同変換で,$f\circ id=id\circ f=f$ を満たす.
(3) 逆元の存在:逆変換 $f^{-1}\in I(R^2)$,つまり,$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=id$ を満たすものが存在する.

以上の性質(1)-(3)を満たす演算$\circ$の定まった集合を数学では**群**と呼びます.つまり,$I(R^2)$ は写像の合成に関して自然と群の構造を持ち,これを**合同変換群**と呼びます.

ある群 G の部分集合 H は G の演算$\circ$に関してそれ自身性質(0)-(3)を満たすとき,**部分群**と呼ばれます.例えば,格子 $\Gamma=\{me_1+ne_2|m, n\text{は整数}\}$ は,その各元 v を,R^2 の各点 x を $x+v$ に平行移動する合同変換とみなすことで,$I(R^2)$ の部分群になります.また1つの鏡映は,2つの元からなる部分群を形成します.実際,ある直線に関する折り返しを与える変換 f は,もう一度同じ変換を施すことで元に戻ります.つまり,f の逆変換は f 自身で,部分集合 $\{id, f\}$ は $I(R^2)$ の部分群です.同じように,ある点に関する180°回転も2つの元からなる部分群になります.一方で,120°回転の場合,3回同じ変換を施すことで元に戻るので,これは3つの元(id,120°回転,240°回転)からなる部分群を形成します.一般に,自然数 n に対して,$\dfrac{360^\circ}{n}$ 回転を考えれば,n 個の元からなる部分群が得られます.このような,有限個の要素やとびとびに現れる要素からなる部分群のことを**離散部分群**と呼びます.

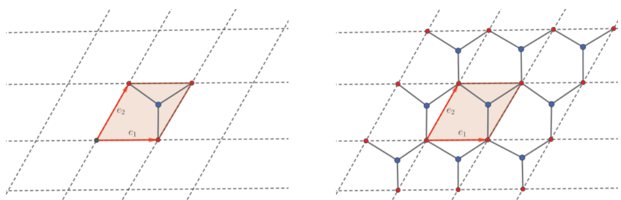
以上の用語を用いるのであれば,前節に述べた平面上のパターンの持つ対称性(合同変換によって形が変わらないと言う性質)は,「合同変換群 $I(R^2)$ の離散部分群の元による変換に対して不変になる」と言う性質として数学的に定式化することができます.

4 対称性を持つグラフの実現

ここからさらに対称性を持つ図形について考察を進めるために,今度は図形の方を定式化してみましょう.簡単のため平面に限って話を進めます.基本的に平面上の図形は,曲線の集まりで書かれるのですが,ここでは数学的に扱いやすくするために点と辺で繋がった図形を考えることにします.点と辺からなる集合のことを数学では**グラフ**と呼びます.グラフは本来,離散的なデータのつながりを表現することに用いられる考え方ですが,ここではこの離散的なつながりを平面の上に描く(実現する)ことでグラフを幾何学的な図形とみなすことにします.

平面上に周期的なグラフを描くには,まず格子 $\Gamma=\{me_1+ne_2|m, n\text{は整数}\}$ を1つ固定します.e_1 と e_2 の張る平行四辺形のことを格子 Γ の**基本領域**と呼びます.2節で述べたように,格子はこの基本領域を二方向に平行移動して並べたものと思えますので,まず基本領域の上に上下左右につながるようにグラフを1つ描き,これをコピーして格子にそって平行移動して配置することで,平面全体に周期的なグラフが描けます.

例えば,$e_1=(1, 0)$ という単位ベクトルとし,これを60°回転した単位ベクトルを e_2 とします.これらが生成する格子 Γ の基本領域の上に,**【図2】**のようなグラフを描き,これを平行移動して配置すれば,**六角格子**と呼ばれる周期的なグラフが描けます**【図2】**.格子の取り方や,基本領域に描くグラフを変えれば,**【図1】**のような,平面全体のさまざまなパターンを作ることが可能です.こうして実現されたグラフは作り方からすべて並進対称性を持っています.一方で,



【図2】 周期的実現の構成.まず格子を決め,その基本領域に上下左右に繋がるグラフを描く.これを平行移動して周期的に配置する.

グラフによっては，線対称性や回転対称性を持っていることもあることに注意しておきます【図 1】.

5 グラフの「綺麗な」実現

前節で述べたことを整理すると，平面上に周期的に実現されたグラフというのは，次の要素によって決まるものと言えます.

(1) 格子 Γ.

(2) 基本領域上のグラフ．つまり，

(ア) 点と辺のつながりと言う意味での抽象的なグラフの構造.

(イ) 抽象グラフの基本領域上への実現の仕方.

以上の要素をもとに，格子 Γ の基本領域の上に上下左右に繋がるように実現されたグラフを格子に沿って平面全体に周期的に並べたものを，格子 Γ に関するグラフの**周期的実現**と呼ぶことにしましょう.

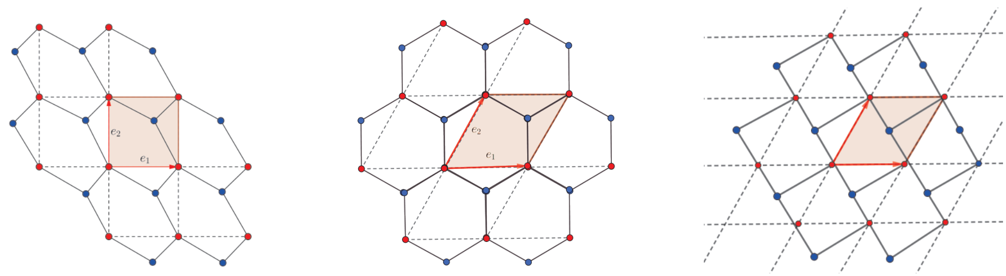
周期的実現の構成において，(ア)の抽象的なグラフの構造を変えてしまうと，当然得られる実現のパターンは全く異なってしまうので，以下ではグラフ構造を 1 つ固定して，**グラフの構造は変えずに**どのような実現のパターンが得られるかを考えてみましょう.

例えば，【図 3】を見てください．これらのグラフは点と辺のつながりの情報が同じなので，グラフの構造としては全て同じものです．違いは(1)格子 Γ および(2)-(イ)グラフの実現のしかたのいずれか，又はその両方の要素です．つまり，この要素を変えることで，同じグラフ構造でも異なる周期的実現が無数に得られることになります．では，どの実現の仕方が最も「綺麗」に見えるでしょうか？ここではそれを「対称性」と言う観点から考えてみることにしましょう．「最も対称性を持っている実現はどれでしょうか？」そう問われれば，それは【図 3】中央の正六角格子であろうと多くの人は気付くかもしれません．確かに正六角格子は，並進対称性の他に，線対称性および頂点に関する 120°，240° 回転による回転対称性を持ちます．別の言い方をすれば，【図 3】のその他のグラフにおいては，正六角格子の持ついずれかの対称性が失われているのがわかります．つまり対称性の観点から言うと，正六角格子は最も「綺麗な」実現と言えそうです.

では，他のグラフの場合はどうでしょうか？例えば【図 1】に挙げたようなグラフの実現は，グラフの構造をそれぞれ固定したとき，最も「綺麗な」実現と言えるのでしょうか？結論から言うと，【図 1】に与えたグラフの実現はそれぞれ，最も対称性の高い実現と言うことができます．より一般に，適切な仮定を満たすグラフに対してはいつでも，そのような綺麗な実現の仕方があると言うことが知られています．そしてそれは，数学を用いることで証明することができる事実です．次の節で，そのことを詳しく説明してみましょう.

6 標準的実現

数学的な主張を述べるために，まず離散的な対象であるグラフに対する「対称性」を定義しておきます．X を抽象的なグラフとします．抽象的と言っているのは，まだグラフがどこにも実現されているわけではなく，X が単に頂点の集合 V と辺の集合 E の組みとして与えられていると言う意味です．全単射な写像 $\sigma_V{:}V\to V$ および $\sigma_E{:}E\to E$ であって，頂点の隣接情報を保つもの，つまり $e\in E$ の始点および終点が，σ_V によって，$\sigma_E(e)\in E$ の始点と終点にそれぞれ写されるとき，組 $\sigma=(\sigma_V,\sigma_E)$ のことを X の**自己同型**と呼びます．X の自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(X)$ と書くことにすると，3 節の場合と同様に，写像の合成に関して $\mathrm{Aut}(X)$ は群をなすことがわかります．これを X の**自己同型群**と呼びます．グラフの頂点と辺を全く同じグラフの上の頂点と辺に変換しているという意味で，自己同型はグラフ上の対称性を表していると解釈できます．平面上の合同変換群の類推となっていることに注意してください.



【図 3】 六角格子のいろいろな周期的実現．中央の正六角格子を基準として，左は格子の取り方，右は基本領域上のグラフの実現の仕方を変えている.

本題に戻って，平面上の周期的実現を考えます．まずはその数学的な定義を与えましょう．抽象的なグラフ X の格子 Γ に関する**周期的実現**とは，X から平面 R^2 への（区分的に連続な）写像 $h{:}X\to R^2$ であって，任意の $v\in\Gamma$ に対して，$h(X)=h(X)+v$ が成り立つものとします．また，周期的実現 h が**充満**であるとは，像 $h(X)$ によって囲まれる領域がすべて円盤に同相になる（連続的に変形できる）こととします．例えば六角格子が囲む領域は六角形の和集合ですので充満な実現です．以下，周期的実現は充満であることを仮定しておきます．

前節で述べたように，どのような周期的実現に対しても，グラフの構造を変えずに，格子と基本領域上の実現の仕方の 2 つの要素を変えることで無数の周期的実現を得ることができます．実はその中にいつでも，正六角格子に相当する「綺麗な」グラフの実現の仕方が存在します．そのことを述べたのが次の定理です（より一般的な主張については 3）などを参照して下さい）．

定理：平面上の充満な周期的実現として与えることのできるグラフ X に対して，ある格子 Γ_{st} と，Γ_{st} に関する X の周期的実現 $h_{st}{:}X\to R^2$ であって，次の性質を持つものが存在する；任意の自己同型 $\sigma\in\mathrm{Aut}(X)$ に対して，ある合同変換 $f_\sigma\in I(R^2)$ が存在して，

$$f_\sigma\circ h_{st}=h_{st}\circ\sigma \quad \cdots(\bigstar)$$

が成り立つ．

h_{st} のことを X の**標準的実現**と呼びます．この定理の中の($\bigstar$)と言う性質が，標準的実現が「最も大きな対称性を持つ実現」であることを意味しています．数学的に言えば，グラフの自己同型群が合同変換群のある離散部分群と対応し，この離散部分群の元に関して，実現されたグラフの形が変わらない（不変になる）と言うことです．

例えば，【図 3】中央の正六角格子において，線対称やある点に関する 120°，240° 回転は，点と辺を全く同じグラフの上に写す変換となっているので，それらはグラフ上の自己同型とみなすことができます．正六角格子では，これらの自己同型 σ が平面全体のある合同変換 f_σ により引き起こされる変換に一致しているため，グラフの持つ対称性を，合同変換を通して認識することができます．一方で，【図 3】のその他の実現においては，グラフ上の自己同型 σ が平面全体のある合同変換から引き起こされる変換と一致するとは限りません．そのため，正六角格子に比べて対称性が少ないように見えるのです．また，【図 1】のいろいろな紋様も正六角格子と同じ性質をもっていることが分かると思います．事実，これらもそれぞれのグラフに対する標準的実現になっています．

標準的実現の性質($\bigstar$)は，グラフの持つ任意の対称性（自己同型）が平面全体の対称性（合同変換）から引き起こされると言うことを述べています．つまり標準的実現は，グラフの持つすべての対称性を，合同変換を通して認識する（見る）ことができると言う意味で，グラフの「綺麗な」実現を与えていると言えるのです．

7 おわりに

私たちの身の回りにあるような対称性のある図形に見え隠れする数学について述べてきました．私たちの感じ取ることのできる素朴な感覚から出発して標準的実現をご紹介しましたが，標準的実現はその大きな対称性から，自然界に現れる「結晶」の原子配置の数学的モデルとしても知られています．またそういった特性に着目して，最近では物質科学と言った他分野への応用も検討されています．より詳しいことを知りたい方は，ぜひ参考文献をご覧になってみてください．

参考文献

1） 小谷元子著．離散幾何解析入門．岩波書店．
2） 小谷元子，内藤久資共著．離散幾何解析へのいざない．数学から物質科学へ．日本評論社．
3） 砂田利一著．ダイヤモンドはなぜ美しい？離散調和解析入門．丸善出版．