SPECIAL ISSUE

幾何学と物理学

時空の量子化とはなんだろう

東京理科大学　理学部第二部　数学科　教授　佐古（さこ）　彰史（あきふみ）

1 はじめに

高校生を対象に，あるいは高校生にもある程度わかるように現代幾何学と物理の関係を書くようにという原稿依頼をもらい，安請け合いしたのだが，意外に苦しむことになった．初めはゲージ理論と相対論について書こうと思い，半分ほど書き進めた．しかし，紙数制限で不可能なことがわかった．そこには栄光の歴史もあり，面白くなる可能性があるのだが，面白くなる前に紙数が尽きるのだ．なので2ページ以上書き進めた原稿をきれいさっぱり消去してしまった．今自分が一番興味を持って研究している一つのテーマに絞って書こうと考えた．それで「時空の量子化」だ．ちまたには量子コンピューターだの量子情報だの「量子」という言葉が溢れている．我々の身近な世界と全く異なる，主にミクロの世界を記述する物理理論に由来する言葉だ．時空の量子化を説明するにはやはり簡単に量子力学を説明する必要があるだろう．

2 古典力学とシンプレクティック幾何

身の回りの現象を予測するには概ねニュートンの作った古典力学で済ますことができる．（古典力学というのは後で登場する量子力学ではない力学という意味だ．「古典」を「量子論ではない」という意味で用いる．）例えば大谷翔平選手が打ったボールがどのような軌道で運動してホームランになるかどうかは，打った瞬間の位置 x と運動量 $p=mv$（質量×速度）がわかればよい．本来は位置や運動量をベクトル $x=(x_1, \cdots, x_d)$ と $p=(p_1, \cdots, p_d)$ として表すべきところだが簡単のためそれぞれ一つの変数で以下は書いていく．以後，時刻 t での位置と運動量 $x(t)$，$p(t)$ も単に x，p と書こう．運動量という言葉に馴染みがなければ，速度だと思ってくれればまあよい．この物体の運動を予測する方程式を運動方程式と呼ぶ．ニュートンのやり方で運動方程式を書くとあまり量子力学に似ていないので，ここではハミルトン形式という別の表現で書く．運動エネルギー $\dfrac{p^2}{2m}$ と位置エネルギー $V(x)$（x の多項式関数などの関数）を加えた，要は全部のエネルギーをハミルトニアンと呼び H で表す．

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$$

ハミルトニアンは x と p の両方の関数である．ポアソン括弧と呼ばれる2つの関数から一つの関数を対応させる写像を使って運動方程式を書く．そのために偏微分というものを使う．

高校生はまだ偏微分を習っていないかもしれないので，まずは偏微分が何か見てみよう．変数が x だけの関数 $f(x)$ の微分の定義を思い出すと

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

であった．変数が x だけだとこれで良いのであるが，身の回りのことを記述するにはもっと沢山の変数が必要になる．例えば，時間 t で位置が (x, y, z) 座標における気温を $T(t, x, y, z)$ と表すなどだ．そうすると，t 方向やら x 方向やら y 方向やら，一つの方向での無限小の変化の割合（つまり微分）を知りたいこともある．例えば t 方向の変化は時間が経つと気温が暑くなるか寒くなるか，z 方向の変化は高さが代わると気温が上がるか下がるかといった具合だ．多変数の関数の場合の微分も，変数が一つの時の微分と同じ様に考える．t 方向の変化を知りたい時は，(x, y, z) は固定して（定数だと思って）微分することにする．

$$\frac{\partial T(t, x, y, z)}{\partial t}=\lim_{a\to 0}\frac{T(t+a, x, y, z)-T(t, x, y, z)}{a}$$

これを t に関する偏微分という．同様に例えば z に関する偏微分は (t, x, y) を定数と思い微分することを意味する．具体例を挙げると $\dfrac{\partial txy^2}{\partial y}$ だと y での偏微分なので，t，x は定数として扱い，結果は $2txy$ が得られる．

さてこの偏導関数を使ってポアソン括弧を定義する．

位置 x と運動量 p の 2 変数の関数 $f(x, p)$ と $g(x, p)$ に対して

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} \tag{2}$$

と定義する．より一般に変数が $x=(x_1, \cdots, x_d)$ と $p=(p_1, \cdots, p_d)$ と $2d$ 個ある場合も同様に

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \tag{3}$$

で定義される．

ようやく準備ができたので古典力学の運動方程式を書く．$x(t)$ に対する時間変化はハミルトニアン H とのポアソン括弧

$$\frac{dx(t)}{dt} = \{x, H\} \tag{4}$$

で求められ，$p(t)$ に対する時間変化も

$$\frac{dp(t)}{dt} = \{p, H\} \tag{5}$$

で与えられる．このタイプの運動方程式の作り方はハミルトン形式と呼ばれる．もし興味があれば，この 2 本の方程式から物体の軌道が得られることを確かめて欲しい．例えば例題として，地上で高さ方向の位置座標 x の重力の位置エネルギーが $V(x)=mgx$（g は定数）である，つまり $H=p^2/2m+mgx$ である場合を考える．すると(4)(5)の連立方程式から $mg=-mx''(t)$（ニュートンの運動方程式）が得られて，積分をすることで物体の軌道をえることができる．

この古典力学の量子化を行うことで量子力学を得るわけだが，その前にこのハミルトン形式の力学から生まれた幾何の話についてもコメントしておく．空間を位置と運動量の 2 種類の座標 (x, p) をもつ空間として捉えられ，ポアソン括弧が定義される場合，その空間の幾何をポアソン幾何と呼ぶ．x と p に対してポアソン括弧を適応すると，

$$\{x, p\}=1,\ \{x, x\}=\{p, p\}=0 \tag{6}$$

である．ポアソン括弧が非退化と呼ばれるよい性質をもつ空間について扱う時は特にシンプレクティック幾何と呼ばれる．この分野は現代物理の観点からも重要であることもあり，現代幾何学の大きな分野として発展中の分野である．

3 量子化ってなんだ？

日常の現象を予測できる古典力学をハミルトン形式でみてきた．大谷選手のホームランの軌道でも，ニュートンのリンゴの軌道でも，惑星の運動でもこの方法で予測できるのだ．ところが，ミクロの現象の運動には全くこの方法が通用しない．例えば水素原子の原子核のまわりの電子の軌道は，古典力学で考えると太陽のまわりの惑星同様のはずなのに，実際には全く異なりなぜか離散的な軌道になる．古典力学が全然通用しないのだ．そうしたミクロの物理学である量子力学をちょうど 100 年前頃に作り上げたのがハイゼンベルグやらシュレディンガーなどのきら星の天才達だ．その部分のエキサイティングな話をする紙数の余裕はない．なので天下りで説明していく[1)]．古典力学と量子力学の最も大きな違いは，古典力学では物体の未来のある時刻での位置や運動量（速度）が予測出来るのに対し，量子力学で予測できるのはどのような確率で分布するかだけである．原理的に今どこにいて，どんな速度で動いているかが決まらないのだ．（この説明はより詳しく次ページでもする．）古典力学に比べると量子力学では随分と決定できる情報が少なくなる．このように，不完全とも思える情報しか得られない量子力学に対して，アインシュタインを初め量子力学構築の主人公の一人であるシュレディンガーなど多くの物理学者も不満に感じ，古典力学のような完全な理論が実は存在すると考えていた．しかし，そのような完全な理論は存在しないことが実験で確認されており，量子力学の考え方が正しいことが示された．2022 年のノーベル賞はこの結果に対して授与されている．

この量子力学にもいろいろな表現方法があるのだが，ここではハイゼンベルグの方法で記述してみる．ある粒子の位置を観測しようとするとき，その観測前の状態は内積が計算できるベクトルであらわされ，それを $|\phi\rangle$ と記述する．次に粒子の時刻 t での位置の観測結果を対応付ける，ベクトルに作用し他のベクトルになる写像（作用素）を $\hat{X}$ で表す．（ここでも本来 $\hat{X}(t)$ と書くべきところを省略して $\hat{X}$ と書いた．以下も同様に (t) を略す.）$\hat{X}$ という作用素に対してベクトルの方向が変わらないベクトル $|x\rangle$ も用意する．このように方向の変わらないベクトルは固有ベクトルと呼ぶ．方向は変わらないが大きさは変わるかも知れないのでその値を x と書くと

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle \tag{7}$$

と表される．この x は $\hat{X}$ の固有値と呼ばれる．この 2 つの（適切に時間発展させた）ベクトルの内積 $\langle x|\phi\rangle$ が波動関数と呼ばれる複素数に値をとる関数 $\phi(t, x)$

特集　現代幾何学の地平

を与え時刻 t に x のところに粒子がある確率（の密度）をこの関数の絶対値で与えるとする．量子力学ではこの未来の確率密度を求める方程式が古典力学の運動方程式に対応する．その方程式を理解するため，もう少し準備が必要だ．運動量の観測結果と対応付く作用素も同様に考え $\widehat{P}$ と書くことにしよう．大事なことは $\widehat{P}$ と $\widehat{X}$ の順序を逆転させると結果が異なるということだ．我々の日常では位置と速度の測定は結果は順序によらない．野球で球速を測ってから位置を測定しても，位置を測定してから球速を測定しても結果がかわらないからスピードガンで球速を測定している．しかしミクロの世界では順序をかえると結果が異なる．順序を変えて測定した場合の差に対応する交換子積 $[\widehat{X}, \widehat{P}]:=\widehat{X}\widehat{P}-\widehat{P}\widehat{X}$ が 0 では無いのである．

$$[\widehat{X}, \widehat{P}]=i\hbar \tag{8}$$

i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，$\hbar$ はプランク定数と呼ばれる定数で，順序を変えると結果が変わるその大きさを与えている．この交換するとおつりが出る様を非可換性と呼ぶ．このような非可換性があると観測した位置 x と運動量 p の標準偏差 Δx と Δp の積に下限が生じることが知られている．

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{9}$$

標準偏差，あるいは分散の積に下限があるので，どちらかの分散を 0 に近づけるようにすると，もう一方の分散がとても大きくなることを意味する．位置と運動量が両方同時には正確に測定出来ないということだ．シンプレクティックな空間の量子力学バージョンでは x-p 平面での座標は $\hbar$ くらいの広がりをもってぼんやりとしていることを意味する．これを不確定性原理と呼ぶ．

役者がそろったので，量子力学での運動方程式を書いてみよう．ハイゼンベルグによるとこの方程式は，作用素としてのハミルトニアンを $\widehat{H}=\frac{1}{2m}\widehat{P}^2+V(\widehat{X})$ とすると，交換子積を用いて

$$i\hbar\frac{d\widehat{X}}{dt}=[\widehat{X}, \widehat{H}] \tag{10}$$

と

$$i\hbar\frac{d\widehat{P}}{dt}=[\widehat{P}, \widehat{H}] \tag{11}$$

で得られるというのだ．(10)(11)を解く（固有値や固有ベクトルを求める）ことで実際にミクロの現象を解き明かすことが出来，例えば水素原子の構造を解き明かすことができる．(4)(5)と見比べるとそっくりな形をしていることに今は注目しよう．位置 x と運動量 p を，非可換な関係(8)をもつ作用素 $\widehat{X}$ と $\widehat{P}$ に置き換えられポアソン括弧は交換子積に置き換えれば対応するというのだ．このように古典的な理論から量子論的な理論を得る方法を「量子化」と呼ぶのである．

考えてみると，日常の世界と電子や原子のミクロの世界は全く異なる世界なのになぜこんなに似ているのか不思議だが，とにかく量子化というのは古典的な世界とミクロの世界をつなぐ“どこでもドア”のような働きをするのだ．

❹ 非可換幾何学

さて，幾何学的な立場からこの量子化を考えてみる．シンプレクティック幾何やポアソン幾何のことを思いだそう．(x, p) という座標があり，その構造としてポアソン括弧(6)の関係があった．そうなると量子化した幾何学として，(8)の非可換な関係がある座標をもつ空間の幾何学とは何だろうという思想が生まれる．それを非可換幾何学と呼ぶ[2)]．より日常感覚に近い言葉で言えば，南北方向の座標を測定してから東西を測るのと，東西を測ってから南北を測るのでは結果が異なる幾何学である．さらに(9)のところで述べたように，非可換幾何学ではもはや点の概念が成立しなくなる．そんな幾何学はどうやってつくればいいのだろうと思うかも知れない．これにも，様々なアプローチがある．一つは量子力学で (x, p) という座標やその関数を作用素 $\widehat{X}$，$\widehat{P}$ として置き換えたように，作用素の代数として幾何学を一般化するという方法が考えられ，大きな成功を収めている．また，空間の幾何と，空間上の関数のなす代数がある意味では等価であるという定理もあり，空間の幾何とは関数のなす代数であるとみなされることがある．その考え方を使うと，非可換な幾何学とは関数同士の積 $f(x, p)g(x, p)$ を通常の積のように順序によらない $f(x, p)g(x, p)=g(x, p)f(x, p)$ であるものから，非可換な積 $f(x, p)*g(x, p)\neq g(x, p)*f(x, p)$ に変えてしまって幾何学を作ろうという試みもあり，これも大きく発展してきた．非可換幾何学自体も未完成の幾何学であるが，他にもあらゆる数学分野で様々な量子化を構築されていて，現在も次々と量子化の概念が拡大している最中である．

❺ 時空の量子化

さて，我々の住んでいる時空（時間と空間を合わせた (t, x, y, z) が座標である空間）も，一見するとなめらかな図形の中にいると思って生活しているが，実はそうではないと多くの科学者が思っている．先ほどまでの話だと x と p が非可換で，p は運動量とか速度なので我々の住む時空の座標ではないから，位置座標の x だけ考えている分には可換な世界なのではと思っていたかも知れない．しかしおそらくそうではないと予想されている．例えばアインシュタインによる重力の方程式を見てみる．

$$G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\Lambda g^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}$$

ただし，$G^{\mu\nu}:=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}$ であり Λ が宇宙定数であったりするが，これらの定義について解説する紙数の余裕が無いので，左辺は単純に時空の曲がり具合を表していると思ってほしい．一方右辺は物質や重力以外の力に由来するエネルギーや運動量を表す．右辺は量子力学で記述される．つまり量子力学に由来するエネルギーなどが，時空を曲げる（重力が生まれる）という方程式である．右辺が量子力学で記述される以上，等号で結ばれる左辺の時空も量子力学的であるはずだ．なので，時空も含めた全体が量子力学的に記述されるべきである．つまり我々の住む世界も非可換幾何で記述されるはずだ．日常で東西と南北の測定順序で結果は変わらないのだからそれはおかしいと思うかもしれない．しかし量子化の影響が現れるのはミクロのスケールであった．時空がほぼ点だった宇宙誕生の瞬間や，ブラックホールのように点にエネルギーが集まると量子化の影響が大きいのだ．我々の住む宇宙が現在の姿になる本質に時空の量子化が関わっている．

アインシュタインの重力理論を含む時空の量子化の理論は実は未完成である．一つの有力候補として，弦理論と呼ばれる点粒子ではなく紐とか輪ゴムみたいな閉じた紐の量子力学が考えられている．弦理論の量子力学も不完全であることもわかっており，それ自体もさらに量子化しなければいけないことも知られている．その究極理論の候補は，例えばIKKT（石橋–川合–北澤–土屋の頭文字）行列模型というものが知られている．その理論が発散しないように補正質量を入れた場合の運動方程式は，弦理論が10次元で定義されることに由来して10の座標に対応する $\widehat{X}^{\mu}(\mu=1, \cdots, 10)$ という作用素と交換子積を用いて以下で得られる．

$$[\widehat{X}^{\mu}, [\widehat{X}_{\mu}, \widehat{X}_{\nu}]]=-\hbar^{2}\widehat{X}_{\nu}, \tag{12}$$

有限次元の場合，適当なリー代数の表現がこの解を与えることが知られている．リー代数というのは四則演算のうち掛け算として先ほどの交換子積（またはその一般化したもの）で与えられる代数のことだ．したがって，究極理論の運動方程式の解とリー代数が関係していると思われるが，それと我々の時空や力学系などの物理法則との繋がりがよくわかっていない．我々の住む世界は10次元ではなく，4次元だし我々の身の回りの物理法則はその4次元の時空にゲージ理論という場の理論をまとった幾何学で記述されている．一方のリー代数は行列代数という非可換な代数として記述され，両者を繋げる方法が明らかではない．最近，著者等はその間を量子化で繋ぐ方法について研究している[3]．その中で，さまざまな古典時空をリー代数と対応づける新しい量子化の方法を開発した．今後は時空の量子化として現在の宇宙の幾何と究極理論の解の繋がりが判明するかもしれない．

時空の量子化の研究は今後さらに進化しつづけ，新しい非可換幾何学を生み出しつづける．そして，いつの日か宇宙がどのように始まったのか，宇宙の形はどのように決まったのかなどの謎を解き明かす日が来るかもしれない．

参考文献

1) 高校生でも読める量子力学の教科書に以下がある：松浦壮，“初学の編集者がわかるまで書き直した 基礎から鍛える量子力学：基本の数理から現実の物理まで一歩一歩，”日本能率協会マネジメントセンター，東京，2024
2) 非可換幾何学の教科書は例えば以下のものがある：前田吉昭，佐古彰史，“非可換微分幾何学の基礎”数学の輝き13巻，共立出版，東京，2020.
3) 5節は以下の論文やその参考文献を参照されたし：J. Gohara, A. Sako “Quantization of Lie-Poisson algebra and Lie algebra solutions of mass-deformed type IIB matrix model,” J. Math. Phys, 67（2026）022301. arXiv: 2503. 24060

〈謝辞〉
実際の高校生が本稿を読んで理解できたり楽しめるかわからなかったので，長女とその友人に読んでもらい貴重な意見を頂いた．彼女等に深く感謝する．

特集 現代幾何学の地平