

## 射影代数曲面の幾何学

## 射影平面曲線から射影代数曲面へ

東京理科大学 創域理工学部 数理科学科 教授 伊藤 浩行 いとう ひろゆき

## 1 代数幾何学とは

代数幾何学とは非常に素朴になってしまうと、幾何学的対象である図形を一般化した多様体と呼ばれるもの、特に代数的に多項式により定義されているという意味で**代数多様体**を、代数学的手法を中心としつつ広く解析的手法も用いながら研究する分野である。

代数学的手法を用いて研究をすると捉えると代数学の一分野と見ることもできるし、幾何学的対象を研究するという立場で幾何学であるとも考えることも可能である。<sup>\*1</sup> 従って代数幾何学を代数学と捉えるか幾何学と捉えるかは立場の違いといえよう。また、代数多様体の研究においては、個々の代数多様体の研究であっても、代数多様体を持つ特異点の研究のように**局所的手法**を用いた研究と、射影多様体として諸性質の解明や多様体の分類を行う**大域的研究**とがあり、両者のバランスをとりながら代数多様体を調べていくこととなる。

本稿では、2次元代数多様体である**射影代数曲面**の一例を理解することを目的として、射影平面曲線からスタートし代数幾何学特有のツールであるブローアップという手法を用いて有理楕円曲面を構成してみる。

## 2 射影平面

まずは代数曲線の「入れ物」となる射影平面を導入しよう。**複素射影平面**とは、すべてが同時に0とならない3個の複素数の連比であり  $[x:y:z]$  と記された点の集まりである。

$$\mathbb{P}_\mathbb{C}^2 = \{[x:y:z] \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\}$$

ただし連比であるので0と異なる複素数  $\lambda$  により  $[x:y:z]$  と  $[\lambda x:\lambda y:\lambda z]$  は同じ点を表す。<sup>\*2</sup>

\*1 「科学フォーラム 2024年4月号・現代代数学の深化と広がり」にある代数学的立場から代数多様体を扱った論説を参照してほしい。

\*2 同値関係による商集合という概念をご存知の方は、 $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  にすべての座標を同時に  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  倍したものは同値であるという関係  $\sim$  を定め、その関係により類別された商集合を  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \sim$  として定め、 $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  の各点は  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  の同値類として  $[x:y:z]$  と記述する、と捉えたほうがわかりやすい。

$[x:y:z] \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  をとると  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  より、 $x, y, z$  いずれかは非零である。今、簡単のために  $x \neq 0$  とすると  $[x:y:z]$  は連比であることから  $[x:y:z] = \left[1: \frac{y}{x} : \frac{z}{x}\right]$  であり、 $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in \mathbb{C}^2$  と考えることにより

$$\mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \supset U_x = \{[x:y:z] \mid x \neq 0\}$$

なる部分集合  $U_x$  は  $\mathbb{C}^2$  と同型である。

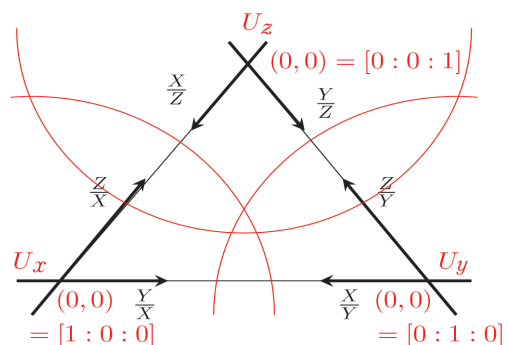
同様に  $\mathbb{C}^2$  と同型な  $U_y$  と  $U_z$  を定めると

$$\mathbb{P}_\mathbb{C}^2 = U_x \cup U_y \cup U_z$$

と、射影平面は3つの  $\mathbb{C}^2$  により覆われていることがわかる。(標準被覆と呼ぶ。)  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  の座標系を  $[X:Y:Z]$  と書くことにすると、 $U_x, U_y, U_z$  の座標系はそれぞれもとの座標系を用いて  $\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right), \left(\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right), \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$  と書くことができる。ところで、いきなり2次元の対象である射影平面を導入したが、1次元の対象となる**射影直線**  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  については同様に定めることができるので各自で考えて欲しい。<sup>\*3</sup> ちなみに  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  における  $U_x$  の補集合は  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \setminus U_x = \{x=0\} = \{[0:y:z]\} \cong \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  である。

## 3 射影平面内の代数曲線

代数多様体とは冒頭でも述べたが多項式によって定義される図形、すなわち多項式の共通零点集合のことである。射影平面  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  内で多項式の零点集合を考える



【図1】射影平面  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$

\*3  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim = U_x \cup U_y \cong \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^1$  であり  $U_x$  と  $U_y$  の局所座標はそれぞれ  $\frac{Y}{X}$  と  $\frac{X}{Y}$  である。

にあたり、多項式は3変数斉次多項式を考える必要がある。斉次多項式とは多項式

$$F(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k \geq 0}^{有限和} A_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

であり、任意の非零複素数 $\lambda$ に対して $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^d F(X, Y, Z)$ をみたす $d > 0$ が存在するようなものを言う。このような多項式でなければ射影平面の点を代入して0になるか否かが意味を持たないことは容易にわかるであろう。この $d$ を斉次多項式 $F(X, Y, Z)$ の次数と呼ぶ。例えば $d=1$ の場合を考えると

$$F(X, Y, Z) = aX + bY + cZ$$

であるが、零多項式にならないためには $a, b, c \in \mathbb{C}$ の少なくとも一つは0ではないことが必要である。簡単のために $a \neq 0$ とすると座標変換 $X = \frac{1}{a} X' - \frac{b}{a} Y' - \frac{c}{a} Z', Y = Y', Z = Z'$ により $X' = 0$ へ変換できる。すなわち、 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内の次数1の代数「曲線」は座標変換により $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ と同型（つまり射影直線）となることがわかる。

**3.1. 2次曲線** では、次数が2の曲線、2次曲線はどのようなものだろうか。 $F(X, Y, Z)$ は斉次2次多項式なので

$$F = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + a_{12}XY + a_{13}XZ + a_{23}YZ$$

$$F(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} \\ \frac{a_{21}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} \\ \frac{a_{31}}{2} & \frac{a_{32}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

となる。ただし、 $a_{ij} = a_{ji} (i \neq j)$ とする。ここに現れる対称行列 $A$ の標準形を考えることにより2次曲線は次のいずれかに座標変換により同型となることがわかる。<sup>\*4</sup>

$$(i) X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, (ii) X^2 + Y^2 = 0, (iii) X^2 = 0$$

これらは $A$ の階数が3, 2, 1に対応し、(i)は既約(1次式の積には分解しない)2次曲線、(ii)は相異なる横断的に交わる2直線、(iii)は2重直線に対応している。

**3.2. Bézoutの定理** 3次曲線を考える前に曲線と曲線の交点数について述べておく。

2本の相異なる直線 $a_1X + b_1Y + c_1Z = 0$ と $a_2X + b_2Y + c_2Z = 0$ を考える。行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

の $2 \times 2$ 小行列式はいずれかが0にならないので、仮に $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ とすると $U_x$ 上ではこれら2直線は点 $\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$ で交わることがわかる。すなわち、射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内の任意の2直線は必ず交わることがわかる。

一般の $d$ 次斉次多項式 $F(X, Y, Z)$ を考える。 $P = [1:b:c] \in U_x$ を $F$ が定義する代数曲線 $C$ 上の点とする。このとき $y, z$ に関する2変数多項式 $F(1, y, z)$ のTaylor展開

$$F(1, y, z) = \sum_{k=0}^d \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^k}{\partial y^i \partial z^j} F(1, b, c) (y-b)^i (z-c)^j$$

における $(y-b)^i (z-c)^j$ の係数

$$A_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial y^i \partial z^j} F(1, b, c)$$

が非零となるような最小の $i+j$ を $C$ の $P$ における重複度という。重複度は正整数であるが、それが1となるとき $P$ を $C$ の特異点とよび、 $P$ における重複度が1より大きい場合、 $P$ は $C$ の特異点であるという。(  $P \in U_y$  や  $P \in U_z$  の場合も同様)

次にもう一つ $e$ 次斉次多項式 $G(X, Y, Z)$ により定義される代数曲線 $D$ を考える。 $P = [1:b:c] \in U_x$ を $C \cap D$ の点として、点 $P$ における $C$ と $D$ の局所交点数を次のように定める。 $C$ と $D$ の $P$ におけるTaylor展開の1次の項 $T_{C,P}^1$ と $T_{D,P}^1$

$$T_{C,P}^1 = \frac{\partial}{\partial y} F(1, b, c) (y-b) + \frac{\partial}{\partial z} F(1, b, c) (z-c)$$

$$T_{D,P}^1 = \frac{\partial}{\partial y} G(1, b, c) (y-b) + \frac{\partial}{\partial z} G(1, b, c) (z-c)$$

はそれぞれの $P$ における接線を表すが、これらが横断的に交わる時 $P$ における局所交点数を $(C \cdot D)_P = 1$ と定める。接線が横断的に交わらないとき、すなわち一致する( $T_{C,P}^1$ と $T_{D,P}^1$ が0ではない複素数 $\lambda$ 倍の関係にある)ときは、Taylor展開のより高次の項( $T_{C,P}^k$ と $T_{D,P}^k$ )まで比較し、

$$T_{C,P}^1 = \lambda T_{D,P}^1, \dots, T_{C,P}^k = \lambda T_{D,P}^k, T_{C,P}^{k+1} \neq \lambda T_{D,P}^{k+1}$$

となる $k$ が存在する。このとき $P$ における局所交点数を $(C \cdot D)_P = k+1$ と定める。曲線 $C$ と $D$ の全ての交点について、この局所交点数を足し合わせたものを $C$ と $D$ の交点数と呼び

$$(C \cdot D) = \sum_{P \in C \cap D} (C \cdot D)_P$$

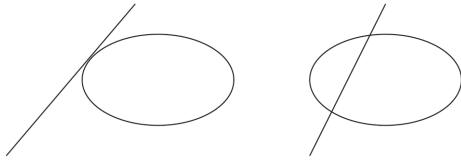
と書く。

以上の準備のもと、 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内の代数曲線 $C$ と $D$ の交

\*4 直交行列 $P$ により $P^T A P$ が対角行列となるようにできるが、 $P(X Y Z)^T$ なる座標変換で $aX^2 + bY^2 + cZ^2$ に変換し、 $X' = \sqrt{a}X, Y' = \sqrt{b}Y, Z' = \sqrt{c}Z$ とすれば良い。



【図2】 3本の直線に分解 (4通り)



【図3】 1本の直線と既約2次曲線に分解 (2通り)

点数について次の定理を得る。

**定理1 (Bézoutの定理).**  $C, D$ を定義する斉次多項式の次数をそれぞれ  $d, e$  とするとき次が成り立つ。

$$(C \cdot D) = de.$$

**3.3. 3次曲線**  $F(X, Y, Z)$ を3次斉次多項式とする。 $F$ がより次数の小さい多項式同士の積に分解するとすれば、それぞれが斉次多項式であることは容易にわかる。よって、分解するとすれば  $F(X, Y, Z) = 0$ なる曲線は3本の直線、1本の直線と既約2次曲線のいずれかである【図3】。3本の直線はそれぞれ  $X^3, X^2Y, XY(X+Y), XYZ$ に対応する【図2】。

以下では既約な3次多項式  $F(X, Y, Z)$ により定義される3次曲線を考察する。既約3次曲線に特異点がないときは、重複を許して9点の変曲点を持つことが示される。ここで**変曲点**とは、その点の接線と曲線の局所交点数が3以上となる点をいう。特異点のない既約3次曲線の変曲点は  $F$ のヘシアンと呼ばれる3次式  $\text{Hess}(F)$ と  $F$ の共通零点 (Bézoutの定理より9点ある)として求められることが証明できる。

$$\text{Hess}(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \end{vmatrix}$$

例えば、 $F(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3$ を考えてみると、 $\text{Hess}(F) = F = 0$ の9個の零点、すなわち  $F$ の変曲点は  $[1: -\alpha: 0], [0: 1: -\alpha], [-\alpha: 0: 1]$  (ただし  $\alpha$ は  $\alpha^3 = 1$ をみたす複素数)である。

一般に、変曲点を利用することで既約3次曲線は次の標準型に変形することができる。

**定理2.**  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ 内で既約3次曲線は次のいずれかに変換できる。

(1) 特異点を持つとき次のいずれかである。

$$(1) XZ^2 = Y^2(Y - X) \quad (2) XZ^2 = Y^3$$

(2) 特異点を持たない場合はワイエルシュトラス標準形を得る。

$$Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$$

ただし  $a, b \in \mathbb{C}$ は  $a^3 - 27b^2 \neq 0$ をみたす。

**3.4. ペンシル**  $F(X, Y, Z)$ と  $G(X, Y, Z)$ を共に3次式とし、それぞれが定める代数曲線の交点を考えると、Bézoutの定理より重複をこめて9点ある。このとき、同時に0にはならない複素数  $\lambda, \mu$ を用いて  $\lambda F(X, Y, Z) + \mu G(X, Y, Z)$ が定める代数曲線はこの9点を必ず通ることがわかる。逆に、この9点を通る代数曲線は適当な  $\lambda$ と  $\mu$ により  $\lambda F(X, Y, Z) + \mu G(X, Y, Z) = 0$ と書くことができる。 $F(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3, G(X, Y, Z) = XYZ$ とすると  $\lambda, \mu$ をパラメータとする代数曲線

$$\lambda F(X, Y, Z) + \mu G(X, Y, Z)$$

$$= \lambda(X^3 + Y^3 + Z^3) + \mu XYZ = 0$$

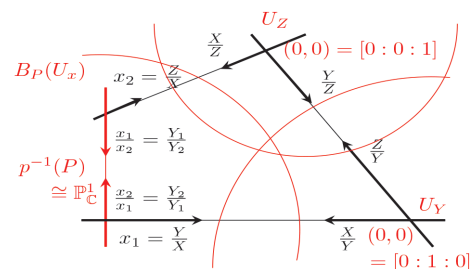
を **Hesse ペンシル**という。パラメータ  $\lambda, \mu$ は同時には0にならないとしているので、 $[\lambda: \mu] \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ と考えられることから、Hesse ペンシルは  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ をパラメータ空間とする、 $F(X, Y, Z) = 0$ の9点の変曲点を通る全ての3次曲線の族を表していることがわかる。

## 4 ブローアップ

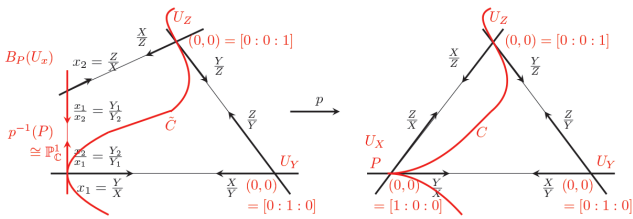
代数幾何特有の操作として**ブローアップ (爆発)**というものがある。さまざまな代数多様体の点においてブローアップ (爆発) という操作を行い、新しい代数多様体を作るものである。射影平面  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ の点  $P = [1: 0: 0]$ でのブローアップを説明する。 $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ の標準被覆  $U_x \cup U_y \cup U_z$ のうち  $P$ が所属する  $U_x$ で「局所的に」考える。

ブローアップという操作は以下に見る通り局所的に定義され、 $P = [1: 0: 0] = (0, 0) \in U_x \cong \mathbb{C}^2$ でブローアップして得られたものに  $U_y$ と  $U_z$ を「貼り合わせて」 $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ の点  $P$ でのブローアップである代数多様体を定める。

これまでとは記号を変えて、 $U_x \cong \mathbb{C}^2$ の局所座標を



【図4】  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ の  $P$ でのブローアップ



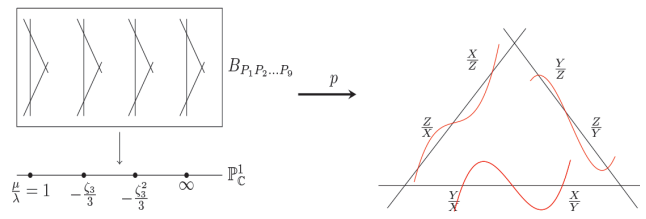
【図5】  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  内の曲線の埋込みブローアップ

$(x_1, x_2)$ ,  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  の局所座標を  $[Y_1:Y_2]$  とする.  $\mathbb{C}^2$  と  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  の直積集合  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  内において多項式  $x_1 Y_2 - x_2 Y_1$  の零点集合として  $P$  における  $U_x \cong \mathbb{C}^2$  のブローアップ  $B_P(U_x)$  が定義されるが, これと  $U_y, U_z$  を貼り合わせたものが  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  の点  $P = [1:0:0]$  におけるブローアップ  $B_P(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = B_P(U_x) \cup U_y \cup U_z$  として定義される代数曲面である. ここで,  $U_x \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \rightarrow U_x, ((x_1, x_2), [Y_1:Y_2]) \mapsto (x_1, x_2)$  なる射影の  $B_P(U_x)$  への制限写像  $p: B_P(U_x) \rightarrow U_x$  を考えると, この写像による  $P = [1:0:0] = (0, 0) \in U_x$  の逆像は  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  と同型であり,  $P$  以外の点での逆像は  $((x_1, x_2), [x_1:x_2])$  なる 1 点である. よって,  $P$  は  $U_y, U_z$  のいずれにも所属しないことと考え合わせると,  $B_P(U_x)$  と  $U_y, U_z$  は自然に「貼り合わせり」, 代数多様体  $B_P(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$  が定まる. 貼り合わせに伴い, ブローアップ射

$$p: B_P(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

が同時に定まるが,  $B_P(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \setminus p^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{P\}$  であり,  $p^{-1}(P) = \{(0, 0), [Y_1:Y_2]\} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  となる. すなわち, もともとあった  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  の点  $P$  以外は変わらず  $P$  の部分が「爆発」して射影直線  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  に置き換わったものが  $B_P(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$  である. ちなみに,  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  内の特異点をもつ代数曲線  $C: Y^3 - XZ^2 = 0$  はブローアップにより  $p^{-1}(C)$  へ変化するが,  $C$  は  $U_x$  では  $x_1^3 - x_2^2 = 0$  であり, 特異点を持っていたが  $B_P(U_x)$  では  $p^{-1}(C)$  は  $x_2^2 \left( x_1 - \left( \frac{Y_2}{Y_1} \right)^2 \right) = 0$  すなわち  $p^{-1}(P) = \{x_2 = 0\}$  と放物線  $\tilde{C}: x_1 - \left( \frac{Y_2}{Y_1} \right)^2 = 0$  となり, 特異点が解消されている. これが代数曲線  $C$  のブローアップによる埋込み特異点解消の操作である.

**4.1. Hesse ペンシルの不確定点解消** Hesse ペンシルのメンバーは全て  $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$  の 9 点の変曲点を通るものであったが, この 9 点でそれぞれ上述のブローアップを行うことで, 実はメンバーが互いに交わずにパラメータ空間  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  上に「並べられた」楕円曲面を得ることができる.



【図6】 Hesse ペンシルの 9 点ブローアップ

**4.2. 楕円曲面** 楕円曲面は一般に射影代数曲面であり, 幾何学的には射影代数曲線をパラメータとする楕円曲線族としての楕円ファイブレーション構造を持っている. Hesse ペンシルにより得られた楕円曲面は射影直線  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  をパラメータとして, 楕円曲線が 1 次元分「並んでおり」,  $\frac{\mu}{\lambda}$  の値に応じて 4 本だけ「退化した」楕円曲線をファイバーとして持つ. この退化ファイバーはいずれも射影直線 3 本が三角形のように交わった 3 次代数曲線である. 楕円曲面にはこのような退化ファイバーが現れるが, その退化ファイバーは小平邦彦や Néron によって一般的に分類されている. 退化ファイバーの種類は 2 つの無限系列と 3 つの例外的な退化曲線からなり, 2 次元有理二重特異点や表現論との関係も深く興味深い対象である.

楕円曲面は非常によく研究されている射影代数曲面のひとつであり, 代数多様体の研究にはなくてはならない重要な対象である. 代数幾何学的には小平, Néron により理論が構築され大きく発展したが, 整数論, 幾何学や Lie 群論, 特異点論, 表現論, 微分方程式論, 数理論理学等々さまざまな領域と結びつくコアな対象であり, 今なお一線で研究され続けている対象である. 楕円曲面の例が提示できたところでようやく射影代数曲面を論ずる入り口に差し掛かったところであるが, 紙面も尽きたので続きは諸文献にお任せすることとする.

### 参考文献

- 1) 今野一宏著, 射影平面曲線, 内田老鶴圃, ( $\mathbb{P}^2$  内の幾何を扱ったもの)
- 2) 宮西正宜著, 代数幾何学, 裳華房, (スキーム理論をベースに曲線と曲面を論じている)
- 3) 伊藤浩行著, 代数幾何はじめの第一歩 (仮), 近代科学社 (予定), (スキーム理論を用いず初学社向けの本)
- 4) 東京理科大学数理解連携プロジェクト (MaSCE) 編, 特異点と McKay 対応・トポロジカル幾何学とその応用, 近代科学社, (代数幾何最前線の講義録)