低次元トポロジーへの招待

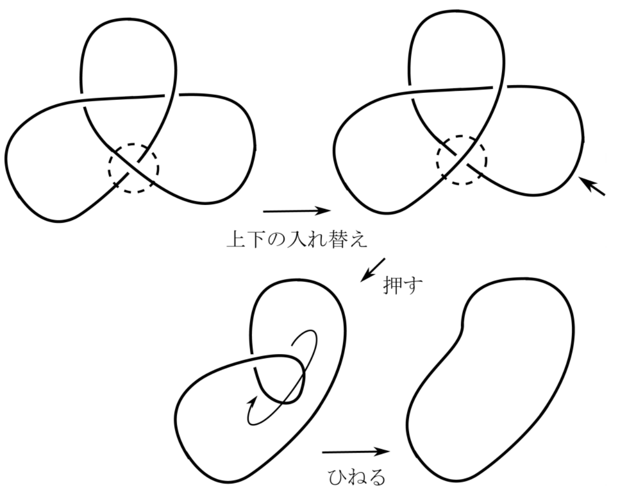
東京理科大学 創域理工学部 数理科学科 教授 廣瀬(ひろせ) 進(すすむ)

❶ なぜ低次元？

「お前のやっていることは低次元だ」といわれると，通常あまりいい気分はしないものですが，これが，幾何学，特に位相幾何学でのこととなると，低次元にはそれなりの難しさや面白味があるものです．例えば，結び目，すなわち，空間内の閉じた曲線について考えてみましょう．3 次元空間内で考えると，【図 1】の左上の結び目をほどくことができないことは，日常生活でも出会うことがあるかもしれませんし，実際に数学的にも示すことができます．一方，これを 4 次元空間内で考えます．点線で囲まれている部分に 2 本の紐が見えますが，上を通っている紐の第 4 座標と下を通っている紐の第 4 座標を違う値にして，その後，第 4 座標はかえないまま，紐の上下をかえることができ，結果として結び目がほどけてしまいます．4 次元以上の空間での結び目が必ずほどけてしまう一方で，3 次元だとほどけない結び目が存在することが，低次元を考えることの難しさや面白味の一因となっています．

❷ 位相幾何学とは？

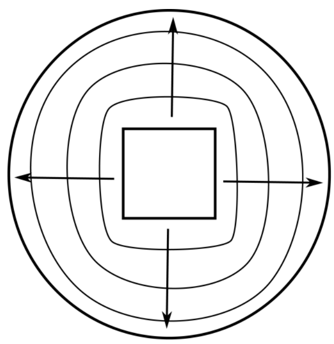
先ほど，何の断りもなく登場した**位相幾何学（トポロジー）**とはどんな数学でしょうか．幾何学というのですから，図形を扱う数学です．平面幾何では，回転や平行移動で重なり合う図形を同じものとみなし，このとき，それぞれの図形の上の点の間に過不足ない対応がついていました．二つの図形について，それぞれの上の点の間に過不足ない連続な対応がついていて，さらに，逆方向の対応も連続になっているときに，その二つの図形が**同相**であるといい，この対応のことを**同相写像**と言います．例えば，【図 2】にあるように，四角形をじわじわと連続に変形して円にすることができますが，この連続な変形をたどると，四角形上の点と円上の点の間に過不足のない連続な対応ができ，変形を逆にたどると，円上の点と四角形上の点の間の逆方向の連続な対応ができます．ここで考えた対応が，四角形と円の間の同相写像となっています．位相幾何学とは，図形を同相かどうかで区別する幾何学で，位相幾何学的に考えると四角形と円は同じものになっています．通勤列車で時折「シカクいアタマをマルくする」という広告を見かけますが，位相幾何的に見るとシカクもマルも同じで，特に鍛えなくてもアタマはマルいものです．



【図 1】 ４次元空間内では結び目はほどける

❸ どんな図形を考えるか？

空間内にあるものは，何でも図形（正確には位相空間）とみなすことが出来ます．例えば，皆さんが読んでいるこの冊子も，また，読んでいる皆さん自身も図形と見なすことができますが，それでは余りにもきりがないので，少し対象を限定してみましょう．とはいえ，球面，例えば，地球の表面などは対象としたいと考えます．地球の表面を一つの平面的な地図で表すことはできませんが，局所的には，平面と同相になっていま



【図 2】 四角形と円は同相

す．このように局所的に平面と同相となっている図形を，**2 次元多様体**と呼びます．また，球面の様に，裏表があって広がりが有限である 2 次元多様体を，**有向閉 2 次元多様体**と呼びます．さらに一般化して，局所的に n 次元空間と同相になっていて，「裏表」があり広がりが有限である図形を**有向閉 n 次元多様体**と呼び，これが，ここで考えようとしている図形です．「裏表」の意味については，ここでは余り悩まないようにしてください．また，特に断らない限り，ここではどの 2 点に対してもそれらを繋ぐ道が図形の上にとれるものを，きちんというと弧状連結である図形を考えることにします．

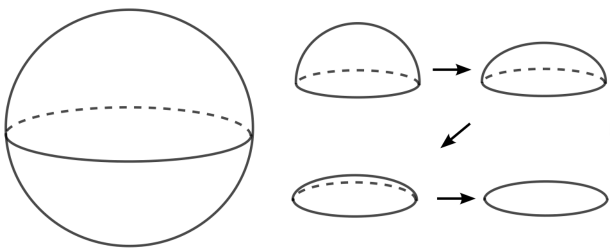
4 2 次元多様体の例は？

球面，正確には **2 次元球面**を集合の形で書くと

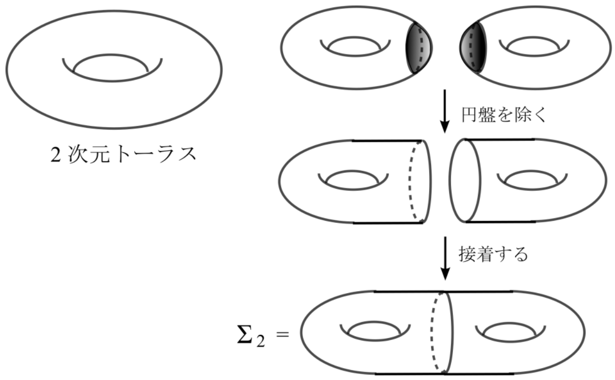
$$\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$$

となり，3 次元空間内の原点から距離 1 の点の集まりですが，これは，有向閉 2 次元多様体になっています．2 次元球面を上半分 $\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3\geqq 0\}$ と下半分 $\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3\leqq 0\}$ に分けます．勿論，上半分と下半分をそれぞれの縁で張り合わせると 2 次元球面が再現できます．ここで，上半分のそれぞれの点について第 3 座標 x_3 を徐々に減らしていき最終的に 0 にしてしまうと，2 次元円盤 $\{(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2 | x_1^2+x_2^2\leqq 1\}$ になります．すなわち，上半分を連続的に変形して 2 次元円盤にすることが出来るので，上半分は 2 次元円盤と同相だということができます【図 3】．同様にして，下半分も 2 次元円盤と同相だと言えます．このことから，2 次元球面は，2 つの 2 次元円盤を用意して，境界を張り合わせて作られるということが分かります．一方，平面は，無限に広がっていますので，有向閉 2 次元多様体にはなっていません．

他にも，有向閉 2 次元多様体はあります．2 次元球面はボールの表面でしたが，ドーナツ（おなじみの穴の開いたお菓子）の表面を考えるとこれは有向閉 2 次元多様体で，**2 次元トーラス**と呼ばれています．



【図 3】 北半球は円盤と同相



【図 4】 Σ_2 および H_2 の構成法

【図 4】の左上をご覧ください．集合の形では，

$$\left\{(x_1, x_2, y_1, y_2)\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1^2+x_2^2=1, \\ y_1^2+y_2^2=1 \end{array}\right\}$$

と書けます．突然 4 次元空間が出てきて何だかおそろしげですが，これは，2 次元トーラスが，2 つの円周 $\{(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2 | x_1^2+x_2^2=1\}$ と $\{(y_1, y_2)\in\mathbb{R}^2 | y_1^2+y_2^2=1\}$ とをかけ合わせたもの，つまり**直積**になっているということを表しています．平たく言うと，空間内で円周をぐるりと 1 周させたときの軌跡が 2 次元トーラスになっているということです．

2 次元トーラスがいくつかあれば，それから他の有向閉 2 次元多様体を作ることができます．2 つの 2 次元トーラスがある時，それぞれの上に 2 次元円盤を考えます．2 次元円盤の縁はそのままにして内部つまり $\{(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2 | x_1^2+x_2^2<1\}$（等号がないことに注意）を取り除きます．すると，【図 4】の様に，縁のある曲面が 2 つできますが，縁同士を張り合わせると，新たな有向閉 2 次元多様体が出来，これを，種数 2 の有向閉曲面と呼んで，記号で Σ_2 で表します．3 つの 2 次元トーラスがある時は，そのうち 2 つで Σ_2 を作っておき，のこりの 2 次元トーラスと Σ_2 の上に 2 次元円盤を考え，それらの内部を取り除いて，縁を張り合わせると，さらに新たな有向閉 2 次元多様体ができ，これを，Σ_3 で表します．一般に g 個の 2 次元トーラスがある時に，同様にして，種数 g の有向閉曲面 Σ_g を作ることができます．

ここまでで，有向閉 2 次元多様体としては，2 次元球面，2 次元トーラス，$\Sigma_g (g=2, 3, ...)$ が出てきましたが，それ以外に有向閉 2 次元多様体が存在しないことが，古来から知られています．

5 3 次元多様体の例は？

有向閉 3 次元多様体の例を挙げてみます．2 次元球

面を表す集合について，次元を一つ上げて，

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4 | x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$$

を考えます．つまり，4 次元空間内の原点から距離 1 の点の集まりは有向閉 3 次元多様体になっていて，**3 次元球面**と呼ばれます．

2 次元トーラスは，2 つの円周をかけ合わせたものでしたが，3 つの円周をかけ合わせたもの

$$\left\{(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)\in\mathbb{R}^6 \middle| \begin{array}{l} x_1^2+x_2^2=1, \\ y_1^2+y_2^2=1 \\ z_1^2+z_2^2=1 \end{array}\right\}$$

は有向閉 3 次元多様体になっていて，**3 次元トーラス**と呼ばれます．3 次元トーラスは，2 次元トーラスと円周の直積と見なすこともできますが，種数 g の有向閉曲面 Σ_g と円周の直積や，2 次元球面と円周の直積も有向閉 3 次元多様体になっていて，これらは互いに同相ではなく，ここまでで，有向閉 3 次元多様体は無限に存在することがわかります．さらに…，きりがないのでここでひとまず例を挙げるのはやめておきます．

6 3 次元多様体の作りかた

有向閉 3 次元多様体には，文字通り多様なものが存在していますが，これらを構成する統一的な方法があります．

先に，2 次元球面は 2 つの 2 次元円盤をそれらの境界で張り合わせれば作ることができることを示しましたが，同様に考えると，3 次元球面は 2 つの 3 次元球体 $\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqq 1\}$ をそれらの境界で張り合わせることにより，作ることができます．ただし，本当に作るためには，球体の境界に全世界を押し付ける必要がありますので，決して作ろうと試みてはいけません．一方，2 つの 3 次元球体の境界を貼り合わせて作られる有向閉 3 次元多様体は 3 次元球面に限ることが知られていますので，他の有向閉 3 次元多様体を作るためには，3 次元球体以外の材料を用意する必要があります．

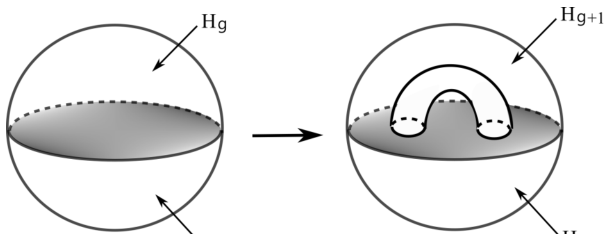
ドーナツの表面だけを考えたものを 2 次元トーラスと呼びましたが，中身も考えたものを**ソリッドトーラス**と呼びます．集合の形で書くと，

$$\left\{(x_1, x_2, y_1, y_2)\in\mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{l} x_1^2+x_2^2\leqq 1, \\ y_1^2+y_2^2=1 \end{array}\right\}$$

となり，2 次元円盤と円周の直積，平たく言うと 2 次元円盤を空間内で 1 周させたときの軌跡がソリッドトーラスです．2 つのソリッドトーラスのそれぞれの境界に 1 つづつ 2 次元円盤を考え，その円盤たちで 2 つのソリッドトーラスを張り合わせてできる図形を**種数 2 のハンドル体**と呼び，H_2 と表します．すなわち，【図 4】の操作を中身が詰まった状態で行って得られるものが H_2 です．さらに，もう 1 つソリッドトーラスを用意して，その境界と H_2 の境界にそれぞれ 1 つづつ 2 次元円盤を考え，その円盤たちで H_2 とソリッドトーラスを張り合わせてできる図形を**種数 3 のハンドル体**と呼び，H_3 と表します．H_3 は 3 個のソリッドトーラスから出来ました．g 個のソリッドトーラスから同様にして作られた図形を**種数 g のハンドル体**と呼び，H_g と表します．後の話の都合上，3 次元球体を H_0 とソリッドトーラスを H_1 と書いて，これらもハンドル体と見なすことにします．H_g の境界は種数 g の有向閉曲面 Σ_g と同相であることに注意してください．

3 次元球体を 2 つ用意して境界で張り合わせると 3 次元球面が出来ましたが，同じ種数のハンドル体を 2 つ用意して境界で張り合わせると有向閉 3 次元多様体が出来ます．実は，**どのような有向閉 3 次元多様体も同じ種数のハンドル体を 2 つ用意し境界で張り合わせることにより構成できる**ことが知られています．この構成法を有向閉 3 次元多様体の *Heegaard* **分解**と呼び，H_g による構成法を**種数 g の *Heegaard* 分解**と呼びます．【図 5】の様に有向閉 3 次元多様体内のハンドル体に更に取っ手を付け加えることができ，このことから，ある有向閉 3 次元多様体に種数 g の Heegaard 分解があれば，同じ多様体の種数 $g+1$ の Heegaard 分解があることが分かります．3 次元球面には種数 0 の Heegaard 分解があるので任意の種数の 3 次元球面の Heegaard 分解があると言えます．

ここで，3 次元トーラスの Heegaard 分解を考えてみます．3 次元トーラスは 3 つの閉区間 $[0, 1]$ の直積 $[0, 1]\times[0, 1]\times[0, 1]$，つまりはサイコロを考えて，1 の目の面と 6 の目の面とを，2 の目の面と 5 の目の面とを，3 の目の面と 4 の目の面とを貼り合わせて作ることができます．サイコロの表面には，8 つの頂点があり，12 本の辺がありますが，3 次元トーラスの中



【図 5】 Heegaard 分解の種数を増やす操作

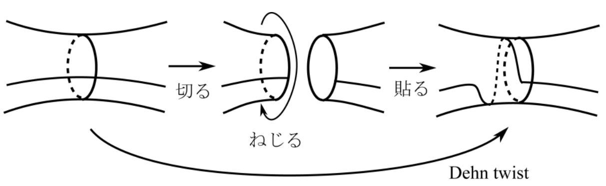
では頂点は1つに，辺は3つにまとまり，これらの頂点と辺からなる3次元トーラス内の図形を膨らませると H_3 と同相な図形になっています．この H_3 を3次元トーラスから取り出すと残りも H_3 と同相になっているので，3次元トーラスには種数3の Heegaard 分解があることが分かります．さらに，「基本群」と呼ばれるものを用いた議論から，3次元トーラスには種数2以下の Heegaard 分解がないことが分かります．

7 結び目はいずこへ～？

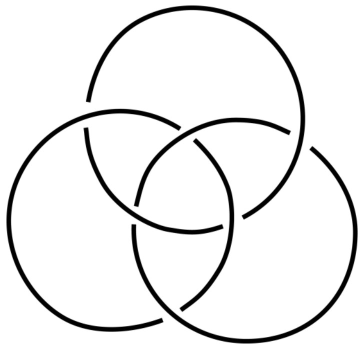
この文章のはじめで，結び目が3次元の難しさや面白味の一因と言いましたが，ここまで，結び目は出てきませんでした．いずこへいってしまったのでしょうか．

先ほど，どんな有向閉3次元多様体 M もハンドル体 H_g を2つ用意してその境界で貼り合わせて構成できると言いました．一方，3次元球面も H_g を2つ用意してその境界で貼り合わせて構成できましたが，その貼り合わせの違いは H_g の境界 Σ_g 上の裏表を保つ同相写像となっています．つまり，Σ_g 上の同相写像が，M と3次元球面の違いの情報を握っているのですが，さらには，同相写像を連続的に変形させても対応する M は変わらないことが知られています．そのことから，3次元多様体について理解するためには，有向閉2次元多様体上の裏表を保つ同相写像全体の集合を考え，さらに連続変形で移りあうものを同一視してできる集合，すなわち，**写像類群**を考えればよいということになります．

有向閉2次元多様体上の写像類群の任意の元が *Dehn twist* と呼ばれる写像の合成として表されることが知られています．Dehn twist とは，【図6】の様に有向閉2次元多様体 S 上の自己交差のない閉曲線，すなわち単純閉曲線に沿って，S を切ってその端を360度ねじってもう一度貼りなおすことによって定まる写像のことです．先ほど，有向閉3次元多様体 M と3次元球面の違いは写像類群が握っていると言いましたが，その違いは Dehn twist に帰着されます．Dehn twist を定める単純閉曲線は H_g の境界上，したがって3次元球面内の単純閉曲線となっていて，こ



【図6】 曲面上の Dehn twist



【図7】 ボロミアン環

れは結び目と言えます．ここで，ようやく結び目が戻ってきましたが，この単純閉曲線で Dehn twist を行うということは，この結び目を膨らませたソリッドトーラスを取り除いて貼りなおすという操作に対応し，この操作のことを *Dehn* 手術と呼びます．つまり，**どのような有向閉3次元多様体も3次元球面に対して結び目に沿った *Dehn* 手術を繰り返すことで作り出すことができる**ことが分かります．例えば，3次元トーラスは【図7】の3つの結び目に沿った Dehn 手術によって得られることが知られています．

ここまでで，有向閉3次元多様体は Heegaard 分解や Dehn 手術によって記述できることを見てきました．つまり，写像類群や結び目について完全に理解すれば3次元多様体の分類が出来るということになりますが，現時点（2025年11月）では，3次元多様体の分類は，その核心といえる部分について解明されてきていますが，まだ完成していないと思われます．

3次元多様体の分類と言えば，学生時代に友人が「我々が住んでいる空間が3次元空間である理由は，3次元多様体が分類できていないからで，分類が完成したら，我々の住んでいる空間は4次元空間に変わる」と予言（？）していたことを思い出しました．4次元空間は何だかおそろしそうなので，いまだに3次元多様体の分類ができていないことにホッとしています．

8 参考文献案内

いくつか参考文献を紹介します．もちろん，他にも沢山の良書があります．

松本幸夫著：「4次元のトポロジー」（日本評論社）
予備知識をほぼ仮定せずに，当時爆発的に進展しつつあった4次元トポロジー研究の空気を伝えてくれる本で，閉2次元多様体の分類の話も書いてあります．

小島定吉著：「ポアンカレ予想」（共立出版）
いろいろな次元における位相幾何学の在り様を知るのに良い本です．