SPECIAL ISSUE

理論物理学と共に発展してきた微分幾何学

― 相対性理論・ゲージ理論を数学的に学ぶための学問 ―

東京理科大学　理学部第一部　数学科　教授　小池（こいけ） 直之（なおゆき）

1 はじめに

現代数学は，大きく，解析学，代数学，及び，幾何学の3つの分野に分けられます．さらに，幾何学は，**微分幾何学**，**位相幾何学**，及び，**代数幾何学**の3つの分野に分けられます．本稿では，微分幾何学が，どのようなことを研究する学問であるかを解説いたします．微分幾何学とは，微分積分を用いて，空間が歪み（＝曲率）をもつことを許し，その歪んだ空間内の図形の微妙な曲がり方（各点における曲率）や図形全体の面積（または，体積）等を研究する学問です．一方，位相幾何学では，空間の歪みと空間内の図形の微妙な曲がり方を問題にせずに連続的な繋がり方のみを問題にして研究する学問です．微分幾何学は硬い幾何学と呼ばれ，位相幾何学は柔らかい幾何学と呼ばれます．また，代数幾何学は，いくつかの多項式の共通零点集合として与えられる図形を研究する学問です．本稿では，微分幾何学とはどのような学問であるかを簡潔に説明するとともに，理論物理学へどのように応用されるかについて，述べることにします．

2 歪んだ空間内の図形

私たちの住んでいる空間は，歪みのない空間で，**3次元ユークリッド空間**と呼ばれ，本原稿では，$\mathbb{E}^3$と表されます．$\mathbb{E}^3$は，$\{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$と同一視されます．ここで，Rは実数の全体を表します．歪んだ3次元空間の基本的な例として，正の曲率を持つ**3次元球面** S^3と負の曲率を持つ**3次元双曲空間** H^3がありますが，これらを視覚的に捉えるためには，これらをE^3内の図形として捉える必要があります．しかし，これらは3次元の空間であるため，$\mathbb{E}^3$内の図形として捉えることができません．それゆえ，視覚的に捉えることができず，それらの図を描くことができません．そこで，次元を一つ下げて，2次元の歪んだ空間を紹介することにします．$\mathbb{E}^3$内の図形$\mathbb{E}^2$，$S^2(r)$，$H^2(r)\,(r>0)$を，各々，

$$\mathbb{E}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 | x_3 = 0\},$$

$$S^2(r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 | {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = r^2\},$$

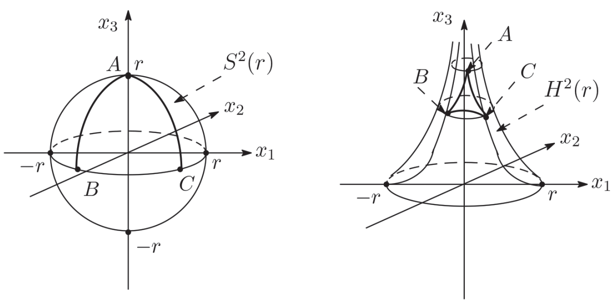
$$H^2(r) = \{(x_1 \cos\theta,\ x_1 \sin\theta,\ x_3) \in \mathbb{E}^3 | 0 \leqq \theta < 2\pi,\ x_3 = r\log\left(\left(r + (r^2 - {x_1}^2)^{1/2}\right)/x_1\right) - (r^2 - {x_1}^2)^{1/2}\}$$

によって定義します【図1】．$\mathbb{E}^2$は曲率0の歪んでいない空間であり，**2次元ユークリッド空間**（または，**ユークリッド平面**）と呼ばれ，$S^2(r)$は正の曲率$1/r^2$を持つ歪んだ空間であり，**半径rの2次元球面**と呼ばれ，$H^2(r)$は負の曲率$-1/r^2$を持つ歪んだ空間であり，一定の負曲率$-1/r^2$を持つ**2次元双曲空間**（または，**双曲平面**）と呼ばれる空間の一部になります．

2次元空間$\mathbb{E}^2$，$S^2(r)$，及び，$H^2(r)$内の図形の振る舞いを比較してみましょう．以下，Mは，$\mathbb{E}^2$，$S^2(r)$，または，$H^2(r)$を表すものとします．M上に3点A，B，CをM上の一つの最短線上にないようにとり，A，B，CをM上の3つの最短線で結ぶことにより，A，B，Cを頂点とするM上の三角形が描かれます．このとき，$\mathbb{E}^2$上の三角形ABCの内角の和は180°になりますが，【図1】のように，$S^2(r)$上の三角形ABCの内角の和は180°より大きくなり，$H^2(r)$上の三角形ABCの内角の和は180°よりも小さくなります．これらの事実を包括的に説明することのできる公式があります．この公式は，**ガウス・ボンネの定理**と呼ばれる大定理から導出される公式であり，次のように与えられます．

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C = \left(\frac{180}{\pi}\left(\pi + \int_{\triangle ABC} K\,dA\right)\right)^{\circ} \tag{1}$$

$$\left(\begin{array}{l}\theta_A, \theta_B, \theta_C : A, B, C \text{ における内角} \\ K : M \text{ の曲率，} dA : M \text{ の面積要素}\end{array}\right)$$



【図1】　球面と双曲平面上の三角形

以下，この公式を**ガウス・ボンネの公式**と呼ぶことにします．M 上の三角形 ABC の（表）面積を S とします．$M=\mathbb{E}^2$ のとき，$K=0$，それゆえ，

$$\theta_A+\theta_B+\theta_C=180^\circ$$

となり，$M=S^2(r)$ のときは，$K=1/r^2$ なので，

$$\theta_A+\theta_B+\theta_C=(1+S/(\pi r^2))\times 180^\circ>180^\circ$$

となり，$M=H^2(r)$ のときは，$K=-1/r^2$ なので，

$$\theta_A+\theta_B+\theta_C=(1-S/(\pi r^2))\times 180^\circ<180^\circ$$

となります．このように，空間の歪み方により，その空間内の図形の性質が異なることを視覚的に捉えることができます．次に，空間の次元について説明しておきます．n を 2 以上の整数として，一般に，n 次元の歪みのない空間として，**n 次元ユークリッド空間** $\mathbb{E}^n$ が定義されます．$\mathbb{E}^n$ は，

$$\{(x_1,\cdots\cdots,x_n)|x_1,\cdots\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

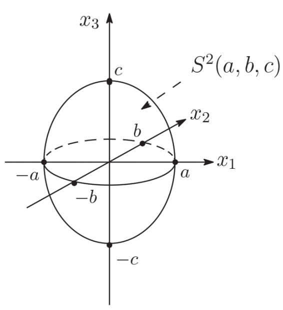
と同一視されます．この同一視から，空間の次元とは，おおよそ，どのようなものであるかを認識していただけるのではないかと思います．n 次元の正の曲率 $1/r^2$ を持つ空間として，**n 次元球面** $S^n(r)$ が定義され，n 次元の負の曲率 $-1/r^2$ を持つ空間として，**n 次元双曲空間** $H^n(r)$ が定義されます．$\mathbb{E}^n$，$S^n(r)$，$H^n(r)$ 内の図形の性質を研究する学問を，各々，**ユークリッド幾何学**，**球面幾何学**，**双曲幾何学**といいます．

3 微分幾何学と位相幾何学の違い

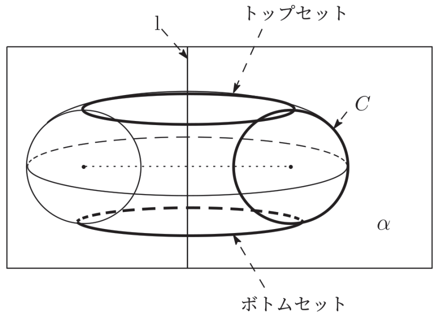
この節では，微分幾何学と位相幾何学の違いを理解していただくために，まず，微分幾何学では本質的に異なるものとして扱われる空間のペアーで，位相幾何学では本質的に同じものとして扱われるものを紹介することにします．a，b，c を正の数として，$\mathbb{E}^3$ 内の図形 $S^2(a,b,c)$ を

$$S^2(a,b,c)=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1^2/a^2+x_2^2/b^2+x_3^2/c^2=1\}$$

によって定義します【図 2】．$S^2(a,b,c)$ は，**楕円面**と呼ばれます．a，b，c のうち，少なくとも 1 つが r と異なっている場合を考えます．このとき，微分幾何学では，$S^2(r)$ と $S^2(a,b,c)$ は，微妙な曲がり具合が



【図 2】 楕円面



【図 3】 輪環面

異なるため，異なるものとして扱われますが，$S^2(a,b,c)$ は $S^2(r)$ をゴムまりと思って伸ばしたり縮めたりしたものとみなされ，連続的な繋がり具合は変わらないため，位相幾何学では，同じものとして扱われます．このように，微分幾何学では，$\mathbb{E}^3$ 内のある図形を僅かに歪めた図形は，元の図形と本質的に異なるものとして扱われるのに比べ，位相幾何学では，僅かに歪めた図形は，元の図形と同じものとして扱われます．この意味で，微分幾何学は硬い幾何学と呼ばれ，位相幾何学は柔らかい幾何学と呼ばれます．

$\mathbb{E}^3$ 内のある直線 ℓ を含むある平面 α 上の ℓ と交わらない円 C を ℓ を回転軸として回転してえられる図形 T^2 は，**輪環面**（**トーラス**）とよばれます【図 3】．

輪環面 T^2 は，そのトップセットとボトムセットを境目として内側の各点では負の曲率を持ち，外側の各点では正の曲率を持ち，トップセットとボトムセットの各点では曲率が 0 であるような興味深い 2 次元空間であり，T^2 の全曲率，つまり，T^2 の各点 p における曲率 K(p) を足し合わせた値（$=T^2$ 上の関数 K を積分した値）

$$\int_{T^2} K\,dA\ \ (dA{:}T^2\text{ の面積要素}) \tag{2}$$

は 0 になります．一方，T^2 の位相幾何学的量であるオイラー数 $\chi(T^2)$ も 0 になり，

$$\int_{T^2} K\,dA=2\pi\chi(T^2) \tag{3}$$

が成り立ちます．また，半径 r の球面

$$S^2(r)=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2\}$$

の各点 p における曲率 K(p) は $1/r^2$ であり，$S^2(r)$ の（表）面積は $4\pi r^2$ なので，$S^2(r)$ の全曲率は 4π になり，一方，$S^2(r)$ のオイラー数 $\chi(S^2(r))$ は 2 なので，

$$\int_{S^2(r)} K dA=2\pi\chi(S^2(r)) \tag{4}$$

が成り立ちます．球面，楕円球面，及び，輪環面等の回転面をはじめとする $\mathbb{E}^3$ 内の有界かつ境界のない滑らかな図形を**閉曲面**といいます．実は，一般の閉曲面 M に対して次式が成り立ちます．

(5) $$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(M)$$

（K:M の曲率，dA:M の面積要素）

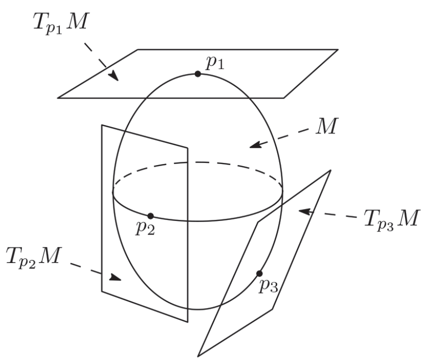
この式は，ガウス・ボンネの定理を用いて示されます．

4 擬リーマン多様体と相対性理論

前節で述べた $\mathbb{E}^n$，$S^n(r)$，$H^n(r)$ や $\mathbb{E}^3$ 内の 2 次元図形は，いずれも**リーマン多様体**と呼ばれるものであり，前者 3 つの空間は n 次元リーマン多様体，$\mathbb{E}^3$ 内の 2 次元図形は 2 次元リーマン多様体と呼ばれ，これらは内積の場 g を備えた（微分積分を展開できる）空間です．g は**リーマン計量**と呼ばれます．リーマン計量について説明しておきます．M を n 次元リーマン多様体とするとき，M の各点 p には，接空間と呼ばれる n 次元ベクトル空間 T_pM とその内積 g_p の組（T_pM，g_p）が定義されており，リーマン計量 g とは，M の各点 p に対し，内積 g_p を対応させる対応を意味します．ここで，ベクトル空間とは，高校で学ぶ平面ベクトルの全体や空間ベクトルの全体を一般化した概念であり，平面ベクトルの全体は 2 次元ベクトル空間であり，空間ベクトルの全体は 3 次元ベクトル空間であります．T_pM は，M を点 p において無限小化した空間として定義されるものであることを注意しておきます【図 4】．リーマン多様体内では，2 つの図形の合同性や有界領域の体積，2 点間の最短経路などが定義されます．

リーマン多様体を一般化した概念として，擬リーマン多様体という概念が定義されます．この概念は，擬リーマン計量と呼ばれる非退化内積の場 g を備えた（微分積分を展開できる）空間です．非退化内積について説明しておきます．M の点 p における接空間 T_pM の非退化内積 g_p とは，T_pM 上の対称 2 次形式と呼ばれる $T_pM \times T_pM$ から R への写像で，T_pM の基底と呼ばれるベクトルの列 $(e_1, \cdots\cdots, e_n)$ で，

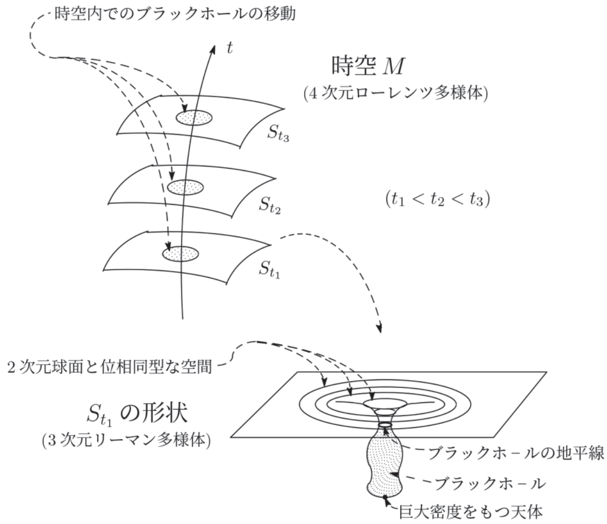
$$g_p(e_1, e_1) = \cdots = g_p(e_r, e_r) = -1,$$
$$g_p(e_{r+1}, e_{r+1}) = \cdots = g_p(e_n, e_n) = 1,$$



【図 4】 接空間

$$g_p(e_i, e_j) = 0 \quad (\text{i と j が異なるとき})$$

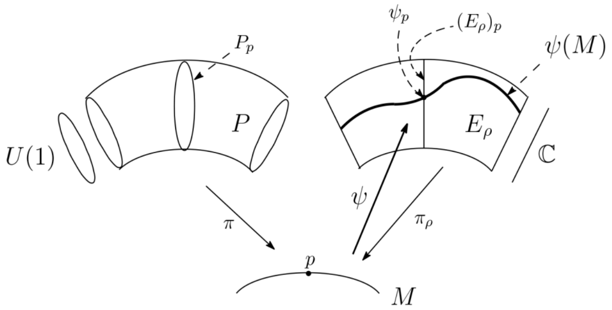
を満たすようなものが存在するようなもののことであり，r はその**指数**と呼ばれます．M の各点 p に対し，g_p が指数 r の非退化内積であるとき，g を**指数 r の擬リーマン計量**といい，M を**指数 r の擬リーマン多様体**といいます．理論物理学における**アインシュタインの一般相対性理論（重力場理論）**では，時間と空間を分けずに，いわゆる**時空**を考えます．時空は，以下のように定義されます．時空内の各点は，空間座標 (x_1, x_2, x_3) と時間座標 (t) を用いて (t, x_1, x_2, x_3) と表されますので，時空は 4 次元の空間であり，与えられる計量は，空間方向のベクトルの長さを正にし，時間方向のベクトルの長さを負にし，空間方向と時間方向の狭間の方向のベクトルの長さを 0 にするような指数 1 の擬リーマン計量であります．結局，時空は指数 1 の 4 次元擬リーマン多様体として定義されます．通常，指数 1 の擬リーマン多様体は，**ローレンツ多様体**と呼ばれます．ブラックホールが 1 つだけある場合の時空の様子は，【図 5】のようになります．



【図 5】 ブラックホールの近くの時空の構造

5 ベクトルバンドルとゲージ理論

自然界には，**重力相互作用**，**電磁相互作用**，**弱い相互作用**，及び，**強い相互作用**の 4 つの相互作用があり，理論物理学では，重力相互作用のみを扱う**一般相対性理論**は，前節で述べたように，**4 次元ローレンツ多様体** M 上で，理論が展開されます．重力相互作用と電磁相互作用を統一的に扱う場の理論は，時空 M 上の U(1) バンドル π:P→M とそれに同伴する複素 1 次元のベクトルバンドル π_ρ:P$\times_\rho \mathbb{C}$→M 上で議論が展開されます．ここで，U(1) は，絶対値 1 の複素数全体か



【図 6】 重力場と電磁場の統一理論を展開する舞台

らなる複素数同士の積を演算とする群であり，**1 次ユニタリ群**と呼ばれるリー群を表し，ρ は U(1)の複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の基本表現と呼ばれる表現を表します．
また，時空上の U(1)バンドルとは，M の各点 p に U(1)がくっ付いているようなもののことであり，時空上の複素 1 次元ベクトルバンドルとは，M の各点 p に複素数平面 $\mathbb{C}$ がくっ付いているようなもののことです【図 6】．簡単のため，$E_\rho = P\times_\rho\mathbb{C}$ とおきます．また，p にくっ付いている U(1)，$\mathbb{C}$ を，各々，P_p，$(E_\rho)_p$ と表すことにします．電子の量子状態は，同伴ベクトルバンドル E_ρ の切断として与えられます．ここで，E_ρ の切断とは，時空 M の各点 p に対し，$(E_\rho)_p$ の元 ψ_p を対応させる滑らかな対応 ψ を意味します【図 6】.
重力相互作用と弱い相互作用を統一的に扱う場の理論は，時空上の SU(2)バンドル $\pi:P\to M$ とそれに同伴する複素 2 次元のベクトルバンドル $\pi:P\times_\rho\mathbb{C}^2\to M$ 上で議論が展開されます．ここで，SU(2)は **2 次特殊ユニタリ群**と呼ばれるリー群を表します．また，重力相互作用と強い相互作用を統一的に扱う場の理論は，時空上の SU(3)バンドル $\pi:P\to M$ とそれに同伴する複素 3 次元のベクトルバンドル $\pi:P\times_\rho\mathbb{C}^3\to M$ 上で議論が展開されます．ここで，SU(3)は **3 次特殊ユニタリ群**とよばれるリー群を表します．

6 等長変換群

ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ の各点 p を，原点を中心として反時計回りに θ° だけ回転した点に対応させる対応を R_θ と表すことにします．このとき，その全体 $\{R_\theta | 0\leqq\theta<360^\circ\}$ は，写像の合成に関して閉じており，**回転群**と呼ばれるリー群になります．このリー群は，SO(2)と表されます．一方，$\mathbb{E}^2$ の各点 p を，原点を通るある直線 ℓ に関して折り返した点に対応させる対応（つまり，ℓ に関する鏡映）を R_ℓ と表すことにします．このとき，$SO(2)\cup\{R_\ell | \ell$：原点を通るある直線$\}$ は，写像の合成に関して閉じており，**2 次直交群**と呼ばれるリー群になります．このリー群は，O(2)と表されます．また，x_1 軸方向に a，x_2 軸方向に b だけ平行移動する $\mathbb{E}^2$ の変換を $T_{a,b}$ と表します．
このとき，その全体 $\{T_{a,b} | a, b\in R\}$ は，写像の合成に関して閉じており，**平行移動群**とよばれるリー群になります．このリー群は，$\mathbb{R}^2=\{(x_1, x_2) | x_1, x_2\in\mathbb{R}\}$ と同一視されます．2 次直交群 O(2)と平行移動群 $\mathbb{R}^2$ から写像の合成によって生成されるリー群は，$\mathbb{E}^2$ の**等長変換群**と呼ばれ，$I(\mathbb{E}^2)$と表されます．一般に，擬リーマン多様体 M に対し，その等長変換群が M の擬リーマン計量 g を保つ変換全体からなるものとして定義され，I(M)と表されます．$\mathbb{E}^n$ 内の図形の性質で $I(\mathbb{E}^n)$に属する各変換で不変な性質を調べる学問が，**ユークリッド幾何学**です．同様に，$S^n(r)$内の図形の性質で $I(S^n(r))$に属する各変換で不変な性質を調べる学問が，**球面幾何学**であり，$H^n(r)$内の図形の性質で $I(H^n(r))$に属する各変換で不変な性質を調べる学問が，**双曲幾何学**であります．

7 平均曲率流・逆平均曲率流

微分幾何学と解析学の狭間の研究として，幾何解析という分野があります．幾何解析では，擬リーマン多様体 M 内の図形を時間発展させて，M 内の良い図形を発見したり，無限遠方へ膨張していく様子を調べることにより，M の無限遠方の構造を調べたりします．
代表的な時間発展として，平均曲率流と逆平均曲率流があります．一般相対性理論における有名なペンローズ予想の研究において，逆平均曲率流が利用されます．
具体的に述べると，ブラックホールのホライゾンを逆平均曲率流に沿って時間発展させることにより，ブラックホールのホライゾンを無限遠方に流していき，その流れを利用して，上記の予想を解決するという研究があります．今後，図形の様々な時間発展を利用して，理論物理学における様々な問題を解決することができるのではないかと期待しています．

参考文献

1) 小池直之，平均曲率流，共立出版，2019.
2) 小池直之，理論物理に潜む部分多様体幾何，共立出版，2021.
3) 小池直之，積分公式で啓くベクトル解析と微分幾何学，共立出版，2022.
4) 小池直之，位相空間の道標，共立出版，2025.

特集 現代幾何学の地平