現代幾何学の地平

現代幾何学の世界
― 分野を越えてつながる数学 ―

東京理科大学　理学部第二部　数学科　准教授
新田（にった）　泰文（やすふみ）

幾何学の起源は，土地や空間を「測る」という人間の根源的な営みにあると言われています．古代エジプトでは，ナイル川の氾濫によって失われる土地の境界を復元するため，長さや面積を正確に測る必要がありました．この実用的要請から生まれた測量の技術が，後に幾何学と呼ばれる学問へと発展していきます．幾何学（geometry）という語が「地を測る」ことを意味しているのは，その成立の背景を端的に物語っています．幾何学は当初，生活や国家運営を支える実践的知識でしたが，やがてそれはより抽象的な思考の対象へと変貌していくことになります．

古代ギリシアにおいて，幾何学は測量という実践的技術から切り離され論理的に体系化された学問として確立されました．ユークリッド『原論』に代表されるように，点・直線・平面といった基本概念を定義し，少数の公理から定理を導くという方法は，数学のみならず科学的思考全体の規範となりました．ここで重要なのは，図形がもはや「描かれた形」ではなく，「論理によって定義される対象」として理解されるようになった点です．この考え方は，その後二千年以上にわたり数学の基本的な方法論として受け継がれてきました．

微分幾何学―曲がりを記述する数学―

近代に入ると，解析学の発展を背景として幾何学は再び大きな転換期を迎えます．微分や積分といった概念を用いることで，曲線や曲面を滑らかに変化する対象として捉え，その性質を精密に記述することが可能となりました．こうして成立した微分幾何学は，図形の「曲がり具合」を数量的に捉える学問として発展しました．曲率という概念を通して，曲面がどのように曲がっているかを内在的に理解するこの理論は，ガウスやリーマンによって高次元へと一般化され，空間そのものの構造を記述する数学へと深化していくこととなります．（小池先生論説）

物理との関わり—時空を記述する幾何学—

微分幾何学の発展は，数学の内部にとどまらず，物理学にも大きな影響を与えました．特に一般相対性理論においては，重力が力としてではなく時空の幾何学的構造として理解されます．このように，物理法則を記述する言語として幾何学が用いられるようになったことは現代科学の特徴の一つです．幾何学はここで，自然を理解するための基本的枠組みの一部となりました．（小池先生論説，佐古先生論説）

位相幾何学—つながりに注目する視点—

一方で，図形の「形」や「曲がり具合」そのものではなく「どのようにつながっているか」に注目する新たな視点も現れました．それが，連続的な変形によって変わらない性質を研究する位相幾何学です．位相幾何学では，図形を伸ばしたり縮めたりしても，切り貼りをしない限りは変わらない構造が本質的なものと考えられます．この立場からは，円と正方形は同じ型の図形として扱われ，ドーナツとマグカップも同一視されます．こうした発想は一見すると直感に反しますが，空間の本質的な構造を捉える上で大変有効な考え方です．

特に三次元以下の空間を主として扱う低次元トポロジーでは，結び目や三次元多様体といった対象が研究されています．これらは視覚的な直感に訴える一方で，厳密な理論的枠組みを必要とする対象でもあります．低次元トポロジーは，数学内部の発展だけでなく量子物理学との関係においても重要な役割を果たしています．（廣瀬先生論説）

代数幾何学—方程式と図形の対応—

さらに，代数方程式の解集合として図形を捉える代数幾何学は，「式」と「形」との深い対応関係を明らかにしてきました．代数方程式は単なる数式として扱われるのではなく，その解全体を一つの図形として考えることで，そこに内在する構造が幾何学的に理解されるようになります．このような視点のもとで，代数曲線や代数曲面は豊かな幾何構造を持つことが明らかとなり，射影空間という考え方を通して，図形はより統一的に理解されるようになりました．（伊藤先生論説）

代数幾何学は長らく現代数学の中心的分野の一つとして発展してきましたが，近年では微分幾何学や位相幾何学，さらには数理物理とも密接に結びついています．かつては異なる言語で語られていた理論が，共通の構造を通じて理解されるようになったことは，現代数学の大きな特徴です．

このように，現代幾何学は微分幾何学，位相幾何学，代数幾何学といった分野に分化しながら発展してきました．しかし，それらは互いに独立して存在しているわけではありません．むしろ，異なる視点から同じ対象を捉えることで，より深い理解が可能となっています．物理理論を理解するために幾何学的概念が導入され，その過程で新たな数学理論が生み出されることもあれば，純粋に数学的な発想が物理学に新しい視点を与えることもあります．数理物理は，こうした相互作用が最も顕著に現れる領域の一つと言えるでしょう．

離散微分幾何学—連続と離散を結ぶ—

さらに近年では，連続的な空間を三角形やグラフといった離散的構造で近似し，その幾何学的性質を調べる離散微分幾何学も注目を集めています．連続理論を離散的モデルに置き換えることで，計算機による解析が可能となり，理論研究と実用的応用との距離が縮まりつつあります．例えば，グラフの標準的実現は離散的対象の中に潜む幾何構造を可視化する代表的な例であり，結晶中の原子配置を表す数学的モデルやグラフェンに代表されるナノ炭素構造の分類などとも深く関係しています．（梶ヶ谷先生論説）

現代幾何学の展望

測量に始まった幾何学は，解析，代数，位相，物理と結びつきながら，その姿を大きく変えてきました．本特集では，東京理科大学に所属する研究者が，それぞれの専門分野の立場から現代幾何学の一端を紹介します．多様な視点を通して，互いにつながりながら広がり続ける幾何学の現在を感じ取っていただければ幸いです．