

ポートフォリオ最適化と深層学習

東京理科大学 経営学部 ビジネスエコノミクス学科 准教授 ^{いえだ} 家田 ^{まさし} 雅志

1 はじめに

金融工学とは、金融の課題に理工学的なアプローチをする研究全般を指す学問だと私は考えています。日本において金融は文系の学問といったイメージが強いように見受けられますが、金融の課題を解決するために理系的な考え方が必須となるケースが多々あります。最たる例はデリバティブの価格付けとそのリスク管理です。公理論的確率論と確率解析を活用することでデリバティブ理論は大きく発展し、現実のビジネスへ応用されました。実際、銀行や証券会社にはクオンツという専門職があり、理工学のバックグラウンドを持つ人材が多く活躍しています。

本稿のタイトルであるポートフォリオ最適化も理系的な考え方が必要な金融の課題です。ポートフォリオ最適化を含めた投資技術や金融市場分析などに対する科学的なアプローチを投資科学といい、金融工学における主要な研究テーマのひとつです。最近ではデータ駆動型の研究も盛んで、金融データサイエンスとして情報科学との学際色が強くなりつつある印象です。

本稿では、ポートフォリオ最適化における深層学習の活用例を紹介します。この例において本質的に重要なのは投資問題を表現する数理モデルの構築です。ビジネスにおいても闇雲に深層学習を適用することで衆目を集められる段階は既に終了しています。解決すべき課題は何か、それを論理立てて整理する一例を楽しんでいただければと思います。

さて、本編の前にポートフォリオという言葉の由来を紹介しておきましょう。国語辞典を引くとポートフォリオとは「紙ばさみ。書類を入れる折りかばん。」であると出てきます。そして、株式や債券などの有価証券が紙媒体で発行されていた時代にこれらをポートフォリオに入れていたことから転じて、かばんの中身である金融資産の構成そのものがポートフォリオと呼ばれるようになりました。当たり前ですが、金融工学を含むファイナンスではもっぱら後者の意味でポートフォリオという言葉を使います。

2 1 期間ポートフォリオ最適化問題

手元に初期投資資金 X_0 があるとして、 T 年間の株式投資を考えましょう。はじめに、いくつかの取り決めをしておきましょう。

- ・投資開始から経過した時間を t とする
- ・開始時刻 $t=0$ でポートフォリオを決め、以降は売買せず T 年後まで保有し続けることとする
- ・投資可能な株式は m 種類あるとして、第 i 番目の株式の時刻 t における株価を S_t^i とする
- ・資金が残った場合は銀行口座に預金し、 T 年後に 1 円あたり R 円の金利が付与されるものとする

投資問題においては、株価ではなく収益率で考えると見通しが良くなるケースが多々あります。第 i 株式の時刻 T までの収益率を

$$K^i = \frac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i}$$

と定めます。また、

$$K = (K^1, K^2, \dots, K^m)^\top$$

とベクトル形式でまとめると、以降の表記が楽になります。ただし、ベクトル y に対して $y^\top$ はその転置を意味します。将来の株価は未知であるため S_t^i および K は確率変数として扱うこととしましょう。

では、開始時刻 $t=0$ におけるポートフォリオを決めましょう。ここでは、初期投資資金 X_0 をどのように配分するかの割合によって、ポートフォリオを表現する方法をとります。第 i 株式への配分割合を π^i と書くことにし、全ての株式への配分割合をベクトル形式 $\pi = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^m)^\top$ にまとめておきます。この π を時刻 $t=0$ におけるポートフォリオ・ウェイト（以降、ウェイトと略記）といいます。また、銀行口座への配分割合を π^0 と書くことにします。これらは配分割合ですので全て足すと 100% となること、つまり

$$\pi^0 + \sum_{i=1}^m \pi^i = 1$$

が成り立たなければなりません。

さて、資金 $x_0\pi^i$ で単価 S_0^i の株式を買うのですから、第 i 株式を $\frac{x_0\pi^i}{S_0^i}$ 単位保有することになります。これ以降は売買をせずに株式を保有し続けると仮定したため、 T 年後のポートフォリオの価値 X_T^π は、預金に付与される金利も考慮すると

$$X_T^\pi = \sum_{i=1}^m \frac{\pi^i X_0}{S_0^i} S_T^i + \pi^0 X_0(1+R)$$

です。後のために π^0 を消去して整理しましょう：

$$X_T^\pi = \sum_{i=1}^m \pi^i X_0 \frac{S_T^i}{S_0^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^m \pi^i\right) X_0(1+R)$$

この X_T^π を望ましい状態へ導くべく π を様々なパターンから選ぶことが我々の目的です。

ナイーブに考えると、 X_T^π が常に最大になるものが欲しくなるところですが、 X_T^π は株価に依存したランダムな量ですから全戦全勝とはいきません。金融工学では X_T^π の期待値をベースに π を評価するアプローチを取ります。ここでは、主流の評価基準を2つ紹介します。

1つ目は平均分散最適化基準です。これは目標とする期待収益を定め、そこからズレてしまうことをリスクとして捉える方法です。期待収益からのズレは分散に評価し、これを最小化する問題として定式化されます：

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \text{Var}(X_T^\pi) \\ &\text{subject to } \mathbb{E}[X_T^\pi] = X_0(1+\bar{\mu}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\mu}$ は目標収益率を表します。このような形の問題を最適化問題、最も良い評価を出した π を最適解と呼びます。問題 (1) においては、最適解 π^* を解析的に得ることができます：

$$\pi^* = (\bar{\mu} - R) \frac{C^{-1}(\bar{\mu} - R\mathbf{1})}{(\bar{\mu} - R\mathbf{1})^\top C^{-1}(\bar{\mu} - R\mathbf{1})}$$

ただし、 μ は収益率 K の期待値、 C は収益率 K の共分散行列、つまり、 $\mu = \mathbb{E}[K]$ 、 $C = \text{Var}(K)$ です。また、 $\mathbf{1}$ はすべての要素が1の m 次元ベクトル $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ です。なお、問題 (1) の表記はスタンダードな形ではないことを注意しておきます。ここでは、金額ベースの X_T^π を基準にモデルを作りましたが、通常は投資の収益率 $K^\pi := \frac{X_T^\pi - X_0}{X_0}$ をベースにモデルを作ります。後の内容との平仄のために以降も金

額ベースでの表記を採用しますが、表現としては等価です。ご興味があれば練習問題として等価であることを示してみてください。

2つ目は期待効用基準で、効用関数 u の期待値を最大化する π を求めます：

$$\text{maximize } \mathbb{E}[u(X_T^\pi)]$$

効用とは経済学の用語で、平たく言えば「満足度」を表す指標です。今の設定では、投資家が X_T^π を得たときに得られる満足度を数値化したものと考えればよいでしょう。期待効用には様々な形がありますが、本稿では対数型効用を紹介します：

$$\text{maximize } \mathbb{E}[\log X_T^\pi] \quad (2)$$

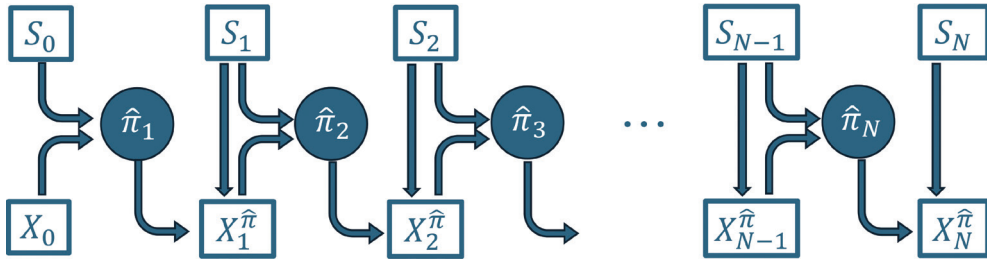
対数型効用には X_T^π の増加に対して効用の増加が次第に小さくなる性質があります。この性質は人間の直感と整合的です。例えば、1万円が1万1千円に増えることと1億円が1億1千円に増えることを比べてみましょう。同じ1千円の追加があったはずなのに、後者のほうがありがたみが減っていると感じるでしょう。なお、問題 (2) における最適解は解析的には得られません。そのため、最適解を得るには近似を用いるか数値計算をする必要があります。

3 多期間ポートフォリオ最適化問題

前節では投資開始後にポートフォリオを一切変更しないことを仮定しました。しかし、投資期間が $T=10$ 年など長期の場合には、状況に合わせてポートフォリオを変更した方が良いのではないかと考えてきます。そこで、本節では一定期間ごとにウェイトを変更できるように問題設定を拡張しましょう。この問題は投資期間を多くの期間に分割するため多期間ポートフォリオ最適化問題と呼ばれます。

はじめに、我々はポートフォリオを一定間隔 h 毎に変更可能であるとします。前節では暗黙的に時刻 t を年単位としていましたので、 h についても年単位とします。たとえば、 $h=1/12$ ならば1ヶ月ごと、 $h=1/52$ ならば1週間ごとにポートフォリオが変更可能です。後のために h として選んで良い値を制限しておきましょう。ポートフォリオの総変更回数を N と書くことにすれば、 $N = \frac{T}{h}$ ですが、 h は N が自然数となる数であると仮定します。

次に、各時刻における株価のモデルを定めます。ただし、記号が煩雑となるため、時刻 $t = nh$ ($n=0, 1, 2, \dots, N$)



【図 1】 NN による投資過程の構造図

における第 i 株式の価格 S_{nh}^i を S_n^i と略記するよう約束し、他の記号についても同様とします。本稿では、各時刻間での第 i 株式の収益率が期待値 μh 、共分散 hC の多変量正規分布に従うものとしします：

$$\begin{aligned} S_{n+1}^i &= S_n^i (1 + K_n^i) \\ K_{n+1} &\sim \mathcal{N}(\mu h, Ch), \quad n=0,1,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 μ は正の m 次元ベクトル、 C は $m \times m$ の正定値行列です。なお、銀行預金には預け入れた期間 h で 1 円あたり rh 円の金利が付与されるものとしします。

さて、ウェイトに時刻の添字をつけましょう。時刻 $t=0$ から $t=h$ までの投資における第 i 株式の配分割合を π_1^i と定め、以降同様に時刻 $t=(n-1)h$ から $t=nh$ までの投資における第 i 株式の配分割合を π_n^i と定めます。よって、時刻 $t=(n-1)h$ から $t=nh$ までの投資におけるウェイトはベクトル形式で $\pi_n = (\pi_n^1, \pi_n^2, \dots, \pi_n^m)^\top$ です。また、全投資期間のウェイトをまとめて $\pi = \{\pi_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ と表します。

以上の準備のもと、ウェイト π を 1 つに決めたときの時刻 $t=(n+1)h$ における投資資金 X_{n+1}^π は前節と全く同じ考え方

$$\begin{aligned} X_{n+1}^\pi &= \sum_{i=1}^m \pi_{n+1}^i X_n^\pi \frac{S_{n+1}^i}{S_n^i} \\ &\quad + \left(1 - \sum_{i=1}^m \pi_{n+1}^i\right) X_n^\pi (1 + rh) \end{aligned} \quad (4)$$

と表されます。

4 深層学習による最適ウェイトの探索

本節では、式 (4) によって定まる X_n^π と対数型効用 (2) による投資問題における最適ウェイトを深層学習によって探索してみましょう。ここで紹介する方法は、デリバティブに深層学習を活用する技術である DeepHedging [1] を教育用に簡略化したものです。

基本的な考え方はシンプルです。ニューラルネットワーク (NN) によって決めるウェイトを $\hat{\pi}$ と表記し、

以下のように定めます。

$$\hat{\pi}_{n+1} = NN(S_n, X_n^{\hat{\pi}}; \theta_n) \quad (5)$$

つまり、ウェイトの変更タイミングにおける株価と投資資金を入力として、次の変更時まで適用するウェイトを学習させる構造です。ただし、 θ_n は $\hat{\pi}$ を決めるための NN のパラメーター全般を表す記号です。

学習プロセスを説明するため、すべての時刻の株価が既知であると仮定して投資資金 $X_n^{\hat{\pi}}$ の推移を順を追って確認しましょう。まず、初期投資額 X_0 と株価 S_0 からウェイト $\hat{\pi}_1$ が決定されます。次に、式 (4) より $\hat{\pi}_1$ 、 S_1 、 S_0 から $X_1^{\hat{\pi}}$ が定まります。そして、 $X_1^{\hat{\pi}}$ と S_1 より $\hat{\pi}_2$ が決定されます。以降も同様に続き、まとめると【図 1】のようなフローで各ステップの $\hat{\pi}_n$ 、 $X_n^{\hat{\pi}}$ が順番に決まり、最終的に $X_N^{\hat{\pi}}$ が得られます。当然ですが $X_N^{\hat{\pi}}$ は $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_N$ によって変化します。したがって、 $\log X_N^{\hat{\pi}}$ を最大にするようにウェイト $\hat{\pi}$ を決定すれば、与えられた株価のもとで対数型効用を最大化するウェイトとなります。

上記ではたった 1 つの株価のパターンに合わせてウェイト $\hat{\pi}$ を決めてしまいましたが、大量の株価のパターンを準備して同様の手順で $\hat{\pi}$ を決めれば様々な状況に対応できるようになりそうです。つまり、大量の株価データを学習させると最適ウェイトを求めることができるはずです。本稿においては株価が式 (3) に従うことを仮定しているため、学習データは多変量正規乱数を使って準備できるため、学習データ量は担保できます。

上記で説明した学習プロセスを整理します：

Step1：学習用株価パターンの準備

式 (3) に従い、多変量正規乱数を用いて株価パターンを生成する。生成した株価パターンには番号を振り、 k 番目のものを $S^{(k)}$ と表記する。合計で M パターンを生成する。

Step2：各株価パターン上での投資結果の計算

与えられた $S^{(k)}$ から式 (4)、(5) より投資結

果を計算し、 $X_N^{\hat{\pi},(k)}$ と表記する。

Step3：対数型効用の計算

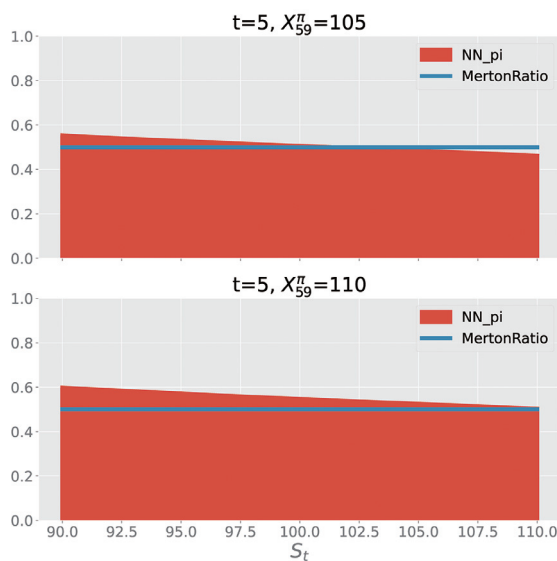
得られた $X_N^{\hat{\pi},(k)}$ から対数型効用を計算する：

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \log X_N^{\hat{\pi},(k)}$$

Step4：NN のパラメーター更新

各 $\hat{\pi}_n$ のパラメーター θ_n を Step3 の対数型効用が高まるように更新する。更新結果が満足なものであれば終了、学習が足りないならば Step2 へ戻る。

ここからは、具体的な学習結果を提示します。表示をわかりやすくするため、株式は1種類のみ $m=1$ とし、 $S_0=100$, $\mu=3\%$, $C_{11}=\sigma^2=0.04$, $r=1\%$ と設定します。初期投資額は $X_0=100$, 投資期間は $T=10$ とし、 $h=1/12$ つまり1ヶ月ごとにウェイトを変更可能とします。学習用の株価データは $M=10$ 万パターン準備し、各時刻にてノード数16・中間層5層の多層パーセプトロンによりウェイトを学習させます。



【図2】最適ウェイトの学習結果

【図2】に $t=5$ におけるウェイト π_{60} の学習結果を示します。グラフの横軸を S_t 、縦軸をウェイトとし、学習によって得られた結果を赤色でプロットしました。ウェイト π_{60} のもう1つ入力については、 $X_{59}=105, 110$ の2パターンでパネルを分けています。

ところで、実は本稿の問題設定の $h \rightarrow 0$ 極限に相当する連続時間モデルにおける最適ウェイト π_t^* は解析的に求めることができ

$$\pi_t^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

と、時刻や株価などに依存しない一定比率です。この比率を Merton 比といい、上記のパラメーター設定では $\pi_t^* = 50\%$ であり、【図2】には青線でプロットしています。ここでは h を比較的小さく設定しているため、 $\hat{\pi}$ は連続モデルの π^* とある程度近い挙動をすることが期待できます。有限なパターンで学習していることもあり完全な一致ではありませんが、グラフを見る限りでは期待通りの学習結果と言えるでしょう。

さて、ポートフォリオ最適化に深層学習を用いる最大のメリットはモデル拡張に対する柔軟性にあります。本稿では最適ウェイトについて解析的にある程度の予想ができる簡単なケースを扱いました。これは現実の投資環境と比べ理想化された状況を考えているとも言えます。より現実に近い複雑なモデル・状況設定を導入すると、解析的に最適ウェイトを求めるアプローチには限界があります。対して、深層学習を用いる方法では学習量や学習時間が増大するものの、基本的に本稿の内容の延長線上で最適ウェイトを得ることができます。例えば、株価により複雑なモデルを採用する、取引の際にかかる手数料を考慮に入れる、評価基準を変更する、などの変更に対して深層学習は即座に対応ができます。このような柔軟さを武器にポートフォリオ最適化に対して深層学習を活用する研究が活発に進んでいます。

おわりに

本稿の最後に、金融工学に期待するとミスマッチが起こる事柄について述べます。先に書いた通り、金融工学におけるポートフォリオ最適化は将来の期待値やそれに類するものを評価基準とします。期待値をターゲットにすることとは大雑把には「平均的に勝てる」方法を探すということです。つまり、「一発逆転大儲け」を狙うような仕組みにそもそもなっていません。本稿ではポートフォリオ最適化についてのみを記載していますが、一般に金融工学の技術は人生一発逆転を狙うようなものには貢献しません。夢のない話ではありますが、金融工学の技術に明るくなると様々な儲け話の不自然な点が見抜けるようになるでしょう。

【参考文献】

- 1) H Buehler et al. "Deep hedging". In: *Quantitative Finance* 19.8 (2019), pp. 1271–1291.