



## 私たちの研究室

# 片岡 武典 研究室

理学部第二部 数学科 講師

かたおか たけのり  
片岡 武典 先生



学部4年生の卒業研究セミナー

## 代数的整数論に岩澤理論の観点から取り組む

代数は数学の中でも最も基本的な学問領域の一つであり、その基盤となるのは足し算、引き算、掛け算、割り算という四則演算である。代数は基本事項でもあるだけにその範囲は広く、深くもある。片岡武典先生はその中でも代数学の整数論への応用について研究を進めている。

### 代数学、整数論の研究とその面白さ

整数論には簡単そうに見えて実際には大変難しい問題が数多くある。その例として17世紀の人フェルマーが提起した次の命題がある。それは、 $n$ が3以上の整数のとき  $x^n + y^n = z^n$  を満たす正の整数  $x, y, z$  は存在しないというものである。これはフェルマーの最終定理と呼ばれ、提起以来およそ350年を経てようやく証明に至った難題である。

片岡先生の整数論の研究では、代数学における「環」という概念が一つの重要な役割を果たしている。

例えば  $a(b+c) = ab+ac$  という式は、足し算と掛け算に関する分配法則というルールにより、左右の式が等しいことを表している。このように足し算と掛け算ができて基本的なルールを満たすものを代数の分野では「環」と称する。その性質を追求する理論を「環論」と呼び、代数学の中心的なトピックの一つとなっている。

「私は環論など代数学を応用した整数論に興味があります。整数というのは必ず足し算と掛け算ができますから、環論を応用することができるのです。この整数論は現代という時代にあっては暗号理論にも応用されています。現代のインターネットのセキュリティに

実際に利用されているRSA暗号は、整数論の古典的定理である「フェルマーの小定理」を基礎にして、整数の素因数分解の難しさを利用しています。暗号文を復号するためには整数の素因数分解を知る必要があり、その分解を見つけ出すには大変な手間がかかるため、暗号文を盗み見られたとしても安全なのです。暗号理論は私の主たる研究対象ではないのですが、代数学、また整数論には、そういう応用ができるポテンシャルもあるということです」と話してくれた。

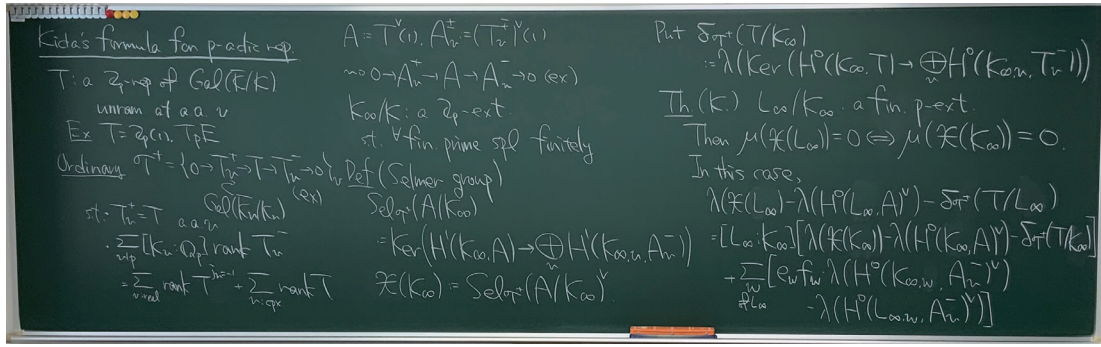
### 整数論における岩澤理論と木田の公式

「私が主に研究しているのは、岩澤健吉という数学者が1950年代に創始した岩澤理論というものです。整数論では方程式の整数解を決定するために有用なイデアル類群というものがあり、理論的にもとても興味深い対象なのですが、岩澤理論はそのイデアル類群の研究に端を発したものです」と話す。

例えば10という整数は  $2 \times 5$  と素因数分解できるが、有理数体を拡張した概念である代数体では、このような素因数分解が必ずしもできるとはかぎらない。

「イデアル類群というのは、代数体で素因数分解ができない度合いを表しているものと言えます。つまり、できないものがあるという『苦しさ』の指数とも言えるのです。イデアル類群が小さい方が、『苦しさ』が少なく、例えば方程式を解くことが容易であることを示しています」と説明してくれた。

岩澤理論では、イデアル類群を単一で扱うのではなく、「無限個のイデアル類群をまとめて扱う」ことが考えの中核をなしている。この「まとめたもの」は



岩澤加群の振る舞いを表す木田の公式

「岩澤加群」と呼ばれている。あまり直接的な運用は難しいが、理論的には岩澤加群が分かれば、イデアル類群が分かってくる。

最近、岩澤加群の振る舞いを表す「木田の公式」の研究に取り組んでいるという。これは岩澤加群の大きさがどのように変化するのかを定量化する公式と言えるものだ。

「ここまでの話を総合すると、木田の公式によって岩澤加群のサイズが分かり、そうすればイデアル類群のサイズも分かり、そしてイデアル類群が分かれば方程式の解法に役立つ、となります。とはいえこれは理想論的なものであり、私はむしろどんどん抽象的な理論を構築していくことに面白さを感じています。木田の公式の簡単な再証明や、新たなタイプの木田の公式についても考えているところです」とも。

片岡先生が岩澤理論を学び始めたのは10年ほど前の修士課程在学中からで、これまでの研究活動の多くは岩澤理論とともにあり、木田の公式に取り組み始めたのはまだ1年ほど前ということだ。岩澤理論の研究者は世界中にいて、片岡先生も2ヵ月間のアメリカでの研究経験を持っている。

### 自分の中で考え続ける

「数学の研究は基本的に個人で行うことが多いです。タブレットなども利用しますが、思考を展開する時など、やはり紙とペンを道具にすることが多いですね。私にとっては思考の整理が一番しやすいと感じられるからです。研究は他の研究者の面白そうな研究を見つけ、論文を読むことから始まります。arXiv（アーカイブ）というプレプリント（査読前に公開される論文）のサーバーなども利用しています。その中で興味が深まった研究があれば、『何が本質的なのか』『より簡単な証明を与えられないか』『より一般的な議論ができないか』などと自分の中で考えを深めていくうちに、や

がて真に有用だと思える理論にたどり着くことがあります。そうなれば論文にまとめて発表します」と話す先生は、現在まだ32歳（取材時）である。

### 難易度の高い研究で、学ぶことがたくさんある

片岡先生が研究室を持って2年目となる現在、研究室には修士2年1人、修士1年3人、学部4年11人が在籍している。

修士課程2年の柳澤拓也さんは、「修士課程に入って1年3ヵ月くらい経ったところですが、純粋数学はやはり難易度が高いです。私は『岩澤理論』について学んでいますが、まだようやく『この理論を勉強しました』と言えるようになったくらいですね。いずれ、この理論のどこか一部にスポットを当てて論文を作成したいと思います」と話す。

修士課程1年の古守太一さんは、「私はガロア理論に興味を持ってこの研究室に入りました。今は特にアーベル拡大を扱う類体論というものを学んでいます。できればガロア拡大全体をやってみたくとも考えています。今取り組んでいるのは類体論の中でもヒルベルト類体というもので、これは『イデアル類群の大きさを測るもの』と言えます」と話してくれた。

研究室における学生の実際の活動は、整数論の専門書を読むことが中心になっているようだ。「自分の専門以外の部分について先輩から教えてもらうことは多い」と、古守さんは言う。

片岡先生は「純粋数学系は大学4年卒業時点では研究論文を求めないことが多いと思いますし、私の研究室もそうです。しかし毎週のセミナーに参加して自分の発表をしっかりと行う必要があります。専門書の内容は理解して発表するだけでも、とても大変で力がつきます」と話してくれた。

太田 正人（ジェイクリエイト）