角の３等分問題と立方体倍積問題の解をグラフィックツールを用いた作図法によって求めてみよう

東京理科大学　創域理工学部　情報計算科学科　教授　明石（あかし）　重男（しげお）

(1) 平面幾何学的作図法を用いた解の表示

例えば、パソコンを用いて方程式の数値解を求める際、通常は極限操作を必要としますが、この操作は、反復操作として実現されるため、計算結果に良い影響を与えません。何故ならば、有限回の操作打ち切り段階で得られた解は、あくまで近似値であり、真値との誤差を含んでいるからです。

そこで、ユークリッド平面幾何学的発想が必要となります。平面幾何学が定める作図法は、「定規とコンパスのみを用いた有限回の操作」として定義づけされています。そこで、「もし定規とコンパスに加えて、新たなる作図道具を追加しても良いから、有限回の操作で、誤差を含まない作図法を確立することは可能か否か」という問題を考えてみましょう。

(2) グラフィックツールを用いた作図問題の解

本来、平面幾何学では、定規とコンパスのみの使用が許されていますが、この紙面で作図法を説明する際、定規とコンパスを用いた作業を視覚的に解説することはできないので、オンライングラフィック機能を持つGeoGebra を使用することにします。

古代ギリシャで誕生した有名な数学的問題として、

問題 1. 角の３等分問題：任意の大きさの角を、作図により３等分する方法。

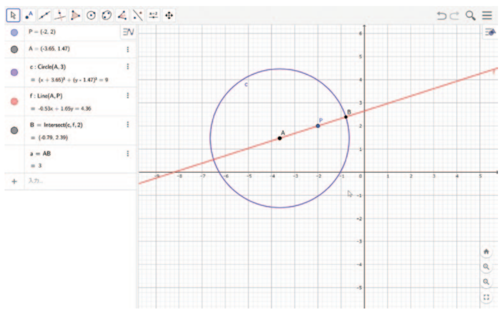
問題 2. 立方体倍積問題：与えられた立方体の２倍の体積を持つ立方体を作図する方法。

問題 3. 円積問題：与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図する方法。

という３個の問題が知られていました。現在では、これら全ての問題は、定規とコンパスのみでは作図不可能であることが証明されています。そこで以下では、前半２問について、「新しい作図道具を追加した有限回の操作」という観点から考察していきましょう。

(3) 角の３等分問題について

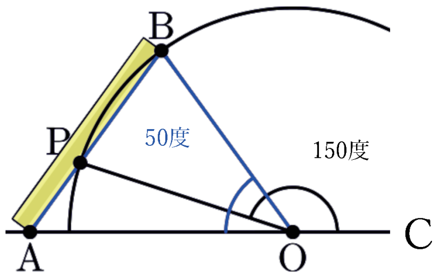
最初に、コンパスの作図機能を拡張した「ネウシスの定規」について説明します。グラフィックツールを用いて、作図を行うイメージを把握してもらえるように、下の図を作製しました。



通常のコンパスでは、点Ａを中心として、ABの長さを変えることなく点Ｂを動かした時に描かれる円を作図に利用します。上の図では、紫色の円に対応します。それに対して、ネウシスの定規では、線分 AB の中から、任意に適当な点Ｐを選んで固定した後、線分 AB の長さを変えることなく点Ａを自由に動かすことで、反対側の点Ｂによって描かれる軌跡を作図に利用します。上の図では、点Ａを点Ｐに向けて、最短距離で近づけた場合に、点Ｂによって描かれる線分が、赤色の直線で描かれています。

ここで、点Ａと点Ｐを一致させた場合、どのようなことが起きるでしょうか？　この場合、点Ａが固定された状態で、点Ｂのみが 360 度自由に回転可能な状態となります。従って、ネウシスの定規によって描かれる軌跡は、先程の紫色の円となります。この事実は、ネウシスの定規が、コンパスの作図機能を拡張していることを示すものです。

それでは、実際に、この定規を用いて、150 度を３等分してみましょう。下の図を見てください。



150 度の角は、∠POC として与えられています。ここで、半径 OP と同じ長さを持つネウシスの定規

ABを、点Pが点Aと点Bの間に存在する固定点となるように設置します。上の図は、点Aを原点Oから左側に向けて移動したとき、点Bが∠POCを構成する円と交差した状況を示しています。このとき、50度の角は、∠AOBとして与えられます。何故ならば、△BAOが、頂点をBとする2等辺三角形であることから、

∠AOP＝30度、

∠OBA＝180度－2∠AOB

が成り立ちます。更に、△OBPも、頂点をOとする2等辺三角形であることから、

∠OBP＝∠OBA＝∠BPO

＝∠BAO＋30度＝∠AOB＋30度

が成り立ちます。△BAOの内角の和を計算すると、

180度＝∠OBP＋∠BAO＋∠AOB

＝(∠AOB＋30度)＋2∠AOB

という式が得られ、∠AOB＝50度となることが示されました。

(4) 立方体倍積問題について

前節で述べた「角の3等分問題」と本問題は、代数学的に眺めてみると、結局、「3次方程式を平面幾何学的作図法によって解く」ことに対応します。例えば、与えられた角度θを3等分することは、三角関数における3倍角の公式に基づく以下の方程式：

$$4(\cos\theta)^3-3\cos\theta=\cos(3\theta)$$

を解くことに帰着され、一辺の長さ1の立方体の体積を2倍にすることは、以下の方程式：

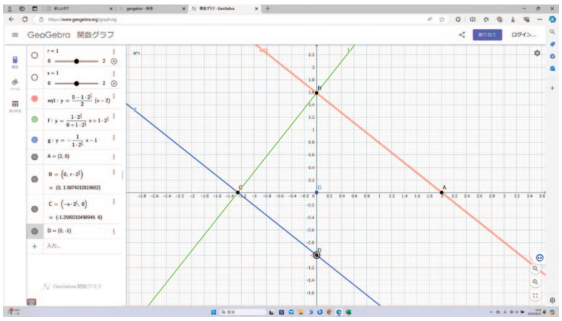
$$x^3=2$$

を解くことに帰着されます。そこで今度は、GeoGebraを用いて、2の3乗根を作図する方法を紹介します。

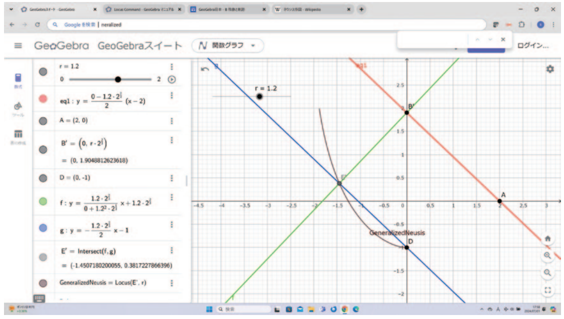
下の図を見てください。座標平面上に以下の4点：

A(2, 0), B(0, $2^{(2/3)}$), C($-2^{(1/3)}$, 0), D(0, -1)

が配置されています。この4点によって作られる直角3角形、△OABと△OBCの相似比、△OBCと△OCDの相似比は、共通に$2^{(2/3)}$：1となっています。



そこで、点Aと点Dが与えられたとき、点Bと点Cを作図するため、「拡張型ネウシスの定規」を考えます。拡張型では、固定点として2点、自由に動かす点として1点、実際に軌跡を描く点として1点を選びます。次の図を見て下さい。



この図では、点Aと点Dを固定点として、点B'をy軸正方向に沿って自由に上下移動することで、点E'が描く軌跡を使用することを想定しています。但し、点B'と点E'は、それぞれ独立に移動可能なのではなく、必ず点B'の動きに依存して、「直線AB'と直線E'Dが平行状態を保つこと」、更に「∠AB'E'＝90度を保つこと」という制約条件を満たすものとします。上の図では、点B'をy軸上下方向に移動した場合に点E'が描く軌跡を表示しており、先に述べた点E'($-2^{(1/3)}$, 0)は、この軌跡とy軸との交点として表示されていることが分かります。

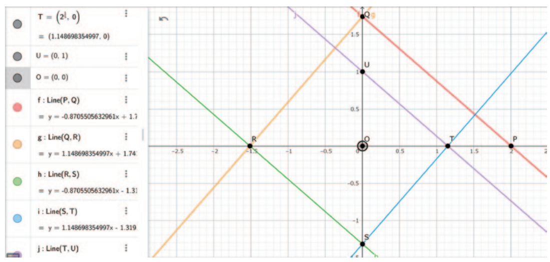
(5) 5乗根作図法への拡張可能性

非実用的ではありますが、$2^{(1/5)}$の長さを持つ線分の作図も、同様の方法で実行可能です。下の図を参照して下さい。例えば、下の図で、

P(2, 0), Q(0, $2^{(4/5)}$), R($-2^{(3/5)}$, 0),

S(0, $-2^{(2/5)}$), T($2^{(1/5)}$, 0), U(0, 1)

と設定すると、直線PQと直線TUが平行となることから、「拡張型ネウシス定規の更なる拡張形」を考えることが可能です。



これまで述べてきたように、「代数学の方程式を解く問題」と「平面幾何学の作図問題」との関連性が、グラフィックツールを用いることで、視覚的に認識できるのは面白いですね。