

結び目と数学

東京理科大学 理学部第一部 数学科 准教授

おおやまぐち

なつみ
菜都美

■ 身の回りに溢れる結び目

「結び目」という言葉を聞いて、何を思い浮かべますか？ 朝起きてから一日を過ごす中で、リボンを結ぶ・ネクタイを結ぶ・靴紐を結ぶ・ゴミ袋を結ぶ・ロープを結ぶなど、私たちの生活はたくさんの「結ぶ」動作で溢れています。

ただ、日常で使う結ぶ動作のほとんどは、「^{かた}固結び」や「ちょうちょ結び」など、せいぜい数種類ではないでしょうか。キャンプが好きでロープワークを学んだ方は、形が数字の8に似ている「^{はち}8の字結び」や、使い勝手が良いことから結び目の王とも呼ばれる「もやい結び」などを知っているかもしれません。

また、気分によっていろいろな結び方を楽しめるものという、ネクタイが思い浮かびます。【図1】に並ぶプレーンノット、ウィンザーノットなど、首元の結び目のかたちが異なるため、数種類の結び方を使い分けている方もいるのではないのでしょうか。ネクタイの結び方は、全部で何通りくらいあると思いますか？

ネクタイの結び方は、イギリスの物理学者であるフィンク（Thomas Fink）とマオ（Yong Mao）により、

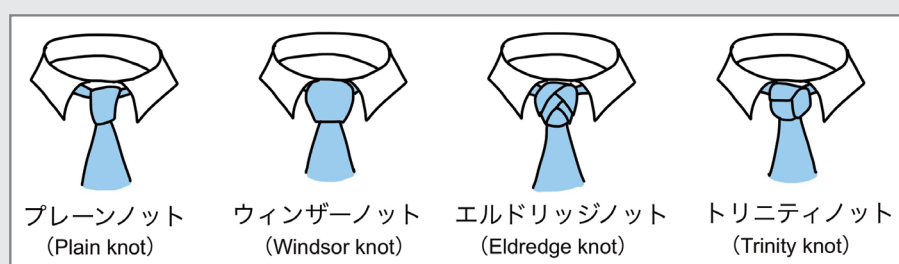
全部で85通りあると数学的に示されています。さらに興味深いのは、その中でも美的基準をクリアした結び方は13通りのみであると紹介されていることです。（ただし、これは通常の長さのネクタイを使った現実的な結び方に限っていることを注意しておきます。）このように、ネクタイの例一つをとってもたくさんの結び方があって、そこには数学が関わっているのです。

■ 数学における結び目

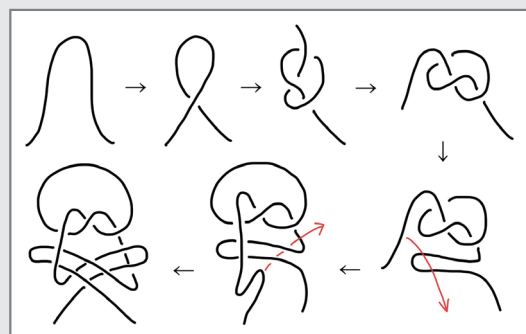
日常に溢れている結ぶ動作や、紐などの“結び目”を数学的に扱うにあたっては、少し注意が必要です。紐を結ぶ過程を【図2】のようにいくつかに分けて見たとき、どの段階を「結ばれている」と認識するのか、^{ほど}「解けている」と認識するのか、その基準は人によって曖昧ではっきりしません。

そこで、この曖昧さを避けるため、結び目理論においては、結んだ紐の両端を閉じて輪にしたものを「**結び目 (knot, ノット)**」と呼ぶことにします。もう少し数学的に言うと、結び目とは、3次元空間の中で自分自身と交わらないような閉曲線のことです。

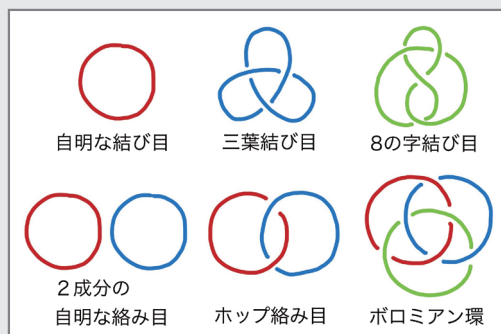
（4次元以上の空間に結び目を入れて考えることもできますが、その場合は「全ての結び目が本質的に同じものになってしまう」という事情があり、ここでは、私たちが普段慣れ親しんでいる3次元空間の中で結び目を考えます。）



【図1】 いろいろなネクタイの結び方



【図2】 ちょうちょ結びの過程



【図3】 代表的な結び目や絡み目

結び目とは閉じた輪1つを指しますが、複数の輪が絡み合っているようなものも考えてみましょう。それぞれの輪を**成分 (component)**、輪の数を成分数と言い、成分数が2以上の場合も含めて一般的に「**絡み目 (link, リンク)**」と呼びます。(つまり、成分数が1である絡み目を、特に結び目と呼ぶのです。)

【図3】に並ぶのが代表的な結び目や絡み目の例で、それぞれ**自明な結び目 (trivial knot)**、**三葉結び目 (trefoil knot)**、**8の字結び目 (figure-eight knot)**、**(2成分の) 自明な絡み目 (trivial link)**、**ホップ絡み目 (Hopf link)**、**ボロミアン環 (Borromean rings)**と呼ばれます。

余談ですが、日本の家紋には様々な結び目や絡み目が使われていて、例えば三葉結び目は「結び柏」、ホップ絡み目は「輪違い」、ボロミアン環は「三つ金輪」などとして表れています。

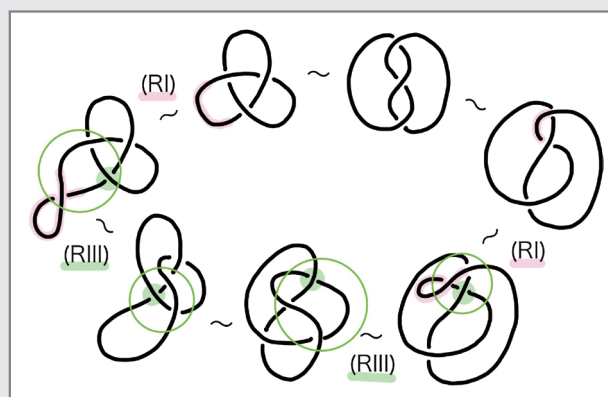
また、ボロミアン環は大変興味深い性質を持っています。ボロミアン環全体では3つの成分がしっかり絡み合っていて、空間の中でいかに動かしてもバラバラになりませんが、3つの成分のうちどれか1つを取り除くと、残りの2つの成分はバラバラ(つまり、自明な絡み目)になるのです。このように、全体では絡まってひとかたまりになっているけれど、そのうちのどの2成分同士も互いに絡んでいない(どの成分でも1つを取り除けば残りが自明な絡み目になる)性質を**ブルン (Brunn) の性質**と言います。ぜひ、4成分以上でブルンの性質を持つ絡み目を考えてみてください。

■ ライデマイスター移動

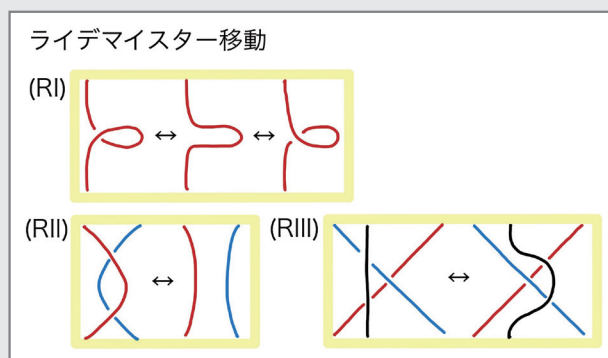
結び目は空間の中でぐにゃぐにゃ変形させると見た目の形が変わりますが、感覚的にもおそらくそう感じる通り、空間の中で少し動かしても、本質的には同じ結び目です。つまり、結び目たちに与える同値関係として、空間の中で連続的に変形して移り合えば同じ結び目と考えることにします。(この同値関係を、**アンビエント・イソトピー (ambient isotopy)**と言います。)

具体的に、三葉結び目に変形の様子を見てみましょう。【図4】の上に並ぶ2つの結び目は、見た目が異なりますが、途中の変形過程を見れば、互いに空間の中の連続的な変形で移り合うことが分かるでしょう。つまり、これらは同じ結び目です。(同じ結び目であることを~という記号を使って表します。)

ところで、【図4】では、平面(この紙の上)に書いた図で結び目の変形過程を表すことで、空間の中に立



【図4】三葉結び目の変形



【図5】3種類のライデマイスター移動

体的に存在する結び目の変形を表現しました。この事実については、ライデマイスターの定理という、とても有用な結果が証明されています。

結び目を3次元空間の中に置いたまま扱うのは大変なため、2次元の平面に射影して(ある方向から結び目に光を当てたときに現れる影をイメージしてください)、線同士が交差して×となる部分における上下が分かるように、少し線を切って表した図を考えます。これを結び目の**図式 (diagram)**と呼び、図式において線の交差を表す部分を**交点 (crossing)**と呼びます。

ドイツの数学者であるライデマイスター (Kurt Reidemeister) は、同じ結び目であることの必要十分条件は、片方の結び目の図式からもう一方の結び目の図式に、**ライデマイスター移動 (Reidemeister move)**と呼ばれる3種類の移動 (RI, RII, RIII) を有限回行って変形できることであると示しました。【図5】

空間の中で変形して結び目が同じであるという概念を、ライデマイスター移動を使うことで、次元を落として平面で議論できるのは、とてもありがたいですね。

これで、結び目を数学的に扱っていく準備ができました。ところで、そもそもなぜ結び目というものを数学的に研究することになったのでしょうか。

■ 結び目理論の歴史

—すべてのものは結び目でできている？—

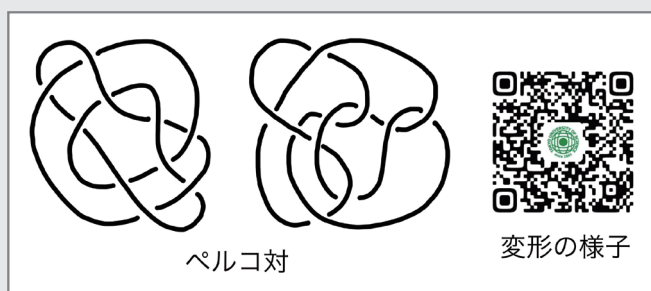
ここで、結び目理論の歴史について少し紹介しましょう。結び目が数学的に研究されることになった背景には、原子に関係する興味深い話題があります。19世紀の後半、イギリスの物理学者トムソン（William Thomson）は、「原子は、（その当時は存在すると考えられていた）エーテルという流体の中の、渦糸が結び目になったものである」という仮説を立てました。これを「渦原子理論」と言います。（トムソンというと馴染みがないかもしれませんが、絶対温度の単位に頭文字のKが使われている、後のケルヴィン卿です。）

当時、物質の最小単位として原子の存在は提唱されていましたが、それが一体どんなものなのかはまだ分かっておらず、トムソンによる渦原子理論によれば、世界中のすべての物質は結び目でできていて、その結び目の違いが物質の違いに対応していると考えたのです。空間の中で連続的に変形しても同じ結び目であることが、原子の安定性を説明するのに相性が良かったようです。例えばトムソンは、自明な結び目が水素に、三葉結び目が炭素に、8の字結び目が酸素に対応していると考えました。

渦原子理論が提唱されたため、（もちろん、この予想が結果的に間違っていたことを私たちはすでに知っているのですが、）結び目の一覧表を作ることは、周期表を作ることにほかならないという、科学者にとっての大きなモチベーションになりました。そして、トムソンの友人である数理物理学者のテイト（Peter Tait）や、アメリカの数学者リットル（Charles Little）は結び目の研究を開始し、それぞれ10交点までの結び目の一覧表を作成しました。

ここで問題です。【図6】の2つの図式は、同じ結び目を表しているでしょうか、それとも異なる結び目を表しているでしょうか。

片方の図式からもう一方の図式に変形するライデマ



【図6】 同じ結び目の異なる図式であるペルコ対

イスター移動の列を見つけられるかどうか、ぜひ挑戦してみてください。先ほど【図4】で確認した三葉結び目の変形は比較的簡単に見つけられましたが、今回は10交点の図式なので、変形はそれなりに大変です。

実は、この2つの図式は75年の間、異なる結び目を表していると認識されて一覧表に載っていたのですが、実際は同じ結び目を表していると、アメリカの弁護士であり数学者でもあるペルコ（Kenneth Perko）が発見したのです。発見者の名前にちなんで、現在はペルコ対（Perko pair）と呼ばれています。

■ 結び目の不変量

さて、結び目が数学の研究対象となった初期の頃は、結び目を数学的に区別する方法が確立されていなかったため、一覧表にはペルコ対のような重複が見られることがありました。

実際、2つの結び目が同じ場合には、お互いに移り合う変形を見つけてあげれば良いですが、異なる結び目の場合には、しばらく頑張っても上手い変形が見つからなかったからといって、本当に異なる結び目なのか断言できません。（もしかしたら、75年後に上手い変形が見つかるかもしれないのです。）せっかく結び目の一覧表を作っても、実際は同じ結び目を表す図式同士を、異なる結び目の図式として重複して数えていないか確信できないのでは、困ってしまいます。

そこで、結び目を区別するための道具として様々な「不変量（invariant）」が開発され、結び目の分類に役立てられてきました。結び目の不変量は、同じ結び目に対しては同じ値や式を与えるため、もし2つの結び目から得られる不変量が異なれば、その2つは異なる結び目であると断言できるのです。（ただし、ここで注意が必要で、異なる結び目がたまたま同じ不変量を持つことはあり得るため、結び目から得られる不変量が同じであったからといって、同じ結び目とは言いきれません。）

2つの結び目が与えられたときに、それらが同じ結び目であるか、異なる結び目であるか判定することは、結び目理論において大きな意義があり、結び目理論は、不変量の研究と共に発展してきました。

■ 多項式不変量

多項式不変量（polynomial invariant）とは、絡み目の図式に対して多項式を対応させるもので、同じ絡み目の異なる図式からは同じ多項式が得られます。

(一般に多項式というと負のべきは含みませんが、絡み目の多項式不変量を考える際は、負のべきも含んだ「ローラン多項式」を指していることに注意が必要です。)

1984年、ニュージーランドの数学者ジョーンズ (Vaughan Jones) は絡み目の新しい多項式不変量である **ジョーンズ多項式 (Jones polynomial)** を発見しました。これは、彼が作用素環論という研究において現れる関係式から発見した絡み目の不変量であって、それまで全く関係がないと思われていた結び目理論への偉大な橋渡しとなったのです。

本稿では、後にアメリカの数学者カウフマン (Louis Kauffman) により再定義された方法でジョーンズ多項式を紹介します。

■ ブラケット多項式

ジョーンズ多項式を定義するにあたって、まずは **ブラケット多項式 (bracket polynomial)** を準備します。絡み目の図式 L のブラケット多項式を $\langle L \rangle$ と表すことにすると、ブラケット多項式の計算ルールは以下の通りです。(多項式における変数は A とします。)

<ブラケット多項式の計算ルール>

- (1) $\langle \text{図式} \rangle = A \langle \text{図式} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式} \rangle$
- (2) $\langle L \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$
- (3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

※ $\bigcirc$ は自明な結び目の交点数が0の図式

まず (1) では、絡み目の図式における1つの交点に着目して、その交点「 $\times$ 」を水平方向「 $\rangle$ 」と垂直方向「 $\smile$ 」に分離してそれぞれ得られる新しい図式のブラケット多項式を使って、元の図式のブラケット多項式を表しています。式の両辺に現れる3つの図式は、着目している交点周辺の部分のみがそれぞれ異なっていて、交点周辺以外の部分では全く同じ図式を表しているものとします。さらに、右辺に現れる2つの図式は共に、左辺にある元の図式よりも1つだけ交点の数が少ない図式になっていることに注意してください。つまり、ある図式のブラケット多項式を、それよりも簡単な(交点数が1つ少ない)図式のブラケット多項式たちを使って表しているということです。よって、(1)の操作を繰り返すことで、元の図式のブラケット多項式は、交点数が0でいくつかの $\bigcirc$ のみからなる図式のブラケット多項式たちを使って表すことができます。

(2) は、図式から $\bigcirc$ を1つ取り除く度に、ブラケ

$$\begin{aligned}
 & \langle \text{三葉結び目} \rangle \\
 & \stackrel{(1)}{=} A \langle \text{図式1} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式2} \rangle \\
 & \stackrel{(1)}{=} A \langle \text{図式3} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式4} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式5} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式6} \rangle \\
 & \stackrel{(1)}{=} A \left\{ A \langle \text{図式7} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式8} \rangle \right\} \\
 & \quad + A^{-1} \left\{ A \langle \text{図式9} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式10} \rangle \right\} \\
 & \quad + A^{-1} \left\{ A \langle \text{図式11} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式12} \rangle \right\} \\
 & \quad + A^{-1} \left\{ A \langle \text{図式13} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式14} \rangle \right\} \\
 & = A^3 \langle \text{図式15} \rangle + A \langle \text{図式16} \rangle + A \langle \text{図式17} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式18} \rangle \\
 & \quad + A \langle \text{図式19} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式20} \rangle + A^{-1} \langle \text{図式21} \rangle + A^{-3} \langle \text{図式22} \rangle \\
 & = A^3 \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\
 & \quad + A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle + A^{-3} \langle \bigcirc \rangle \\
 & = 3A \langle \bigcirc \rangle + (A^3 + 3A^{-1}) \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-3} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\
 & \stackrel{(2)}{=} 3A \langle \bigcirc \rangle + (A^3 + 3A^{-1}) (-A^2 - A^{-2}) \langle \bigcirc \rangle + A^{-3} (-A^2 - A^{-2})^2 \langle \bigcirc \rangle \\
 & = (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) \langle \bigcirc \rangle \stackrel{(3)}{=} -A^5 - A^{-3} + A^{-7}
 \end{aligned}$$

【図7】三葉結び目の図式のブラケット多項式

ット多項式に $(-A^2 - A^{-2})$ がかかることを意味しています。この操作を繰り返すことで、図式に含まれる $\bigcirc$ が1つになるまで減らせることが分かるでしょう。

そして、(3) にて $\bigcirc$ のブラケット多項式を1と定めます。【図7】で計算の様子を確認してみましょう。

ここで、ブラケット多項式が絡み目の不変量になっているか調べてみましょう。多項式が絡み目の不変量となるためには、その絡み目のどんな射影図からも同じ多項式が得られないといけません。つまり、多項式がライデマイスター移動で変化しないことを確認すれば良いと言えます。

まず、(RII) について、上記のルールを適用して計算すると、【図8】のようになります。(RII) を適用した前後の図式から得られるブラケット多項式は等しくなることが分かり、ブラケット多項式は (RII) で不変であることが示せました。(RIII) で不変であることも同様に示せます。

しかし、(RI) について計算すると、【図9】のような結果が得られます。残念なことに、(RI) の前後では $-A^{\pm 3}$ 倍だけ変化してしまうため、ブラケット多項式は絡み目の不変量とは言えません。

■ ジョーンズ多項式

ブラケット多項式自体は絡み目の不変量にならないけれど、(RI) で起きてしまう変化を打ち消すような

$$\begin{aligned}
& \langle \text{cross} \rangle \\
& \stackrel{(1)}{=} A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle \\
& \stackrel{(1)}{=} A (A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle) \\
& \quad + A^{-1} (A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle) \\
& = A^2 \langle \text{cross} \rangle + \langle \text{cross} \rangle + \langle \text{cross} \rangle + A^2 \langle \text{cross} \rangle \\
& = A^2 \langle \text{cross} \rangle + \langle \text{cross} \rangle + \langle \text{cross} \rangle + A^2 \langle \text{cross} \rangle \\
& \stackrel{(2)}{=} A^2 \langle \text{cross} \rangle + \langle \text{cross} \rangle + (-A^2 - A^2) \langle \text{cross} \rangle + A^2 \langle \text{cross} \rangle \\
& = \langle \text{cross} \rangle + (A^2 - A^2 - A^2 + A^2) \langle \text{cross} \rangle \\
& = \langle \text{cross} \rangle
\end{aligned}$$

【図8】ライデマイスター移動 (RII) によるブラケット多項式の不変性

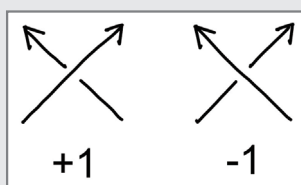
$$\begin{aligned}
& \langle \text{cross} \rangle \stackrel{(1)}{=} A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle \\
& = A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle \\
& \stackrel{(2)}{=} A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} (-A^2 - A^2) \langle \text{cross} \rangle \\
& = (A - A - A^3) \langle \text{cross} \rangle \\
& = -A^3 \langle \text{cross} \rangle \\
& \langle \text{cross} \rangle \stackrel{(1)}{=} A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle \\
& = A \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle \\
& \stackrel{(2)}{=} A (-A^2 - A^2) \langle \text{cross} \rangle + A^{-1} \langle \text{cross} \rangle \\
& = (-A^3 - A^{-1} + A^{-1}) \langle \text{cross} \rangle \\
& = -A^3 \langle \text{cross} \rangle
\end{aligned}$$

【図9】ライデマイスター移動 (RI) によるブラケット多項式の変化

補正をすることで、不変量を構成することができます。

まず、絡み目に「向き (orientation)」という構造を入れて交点の様子を観察してみましょう。(絡み目の各成分に矢印をつけて向きを表すことにします。) 結び目には2通りの向きのつけ方が考えられ、成分数が n の絡み目については、各成分にどちらの向きをつけるかで、考えられる向きは 2^n 通りです。(向きのついた絡み目が同じ絡み目であるとは、空間の中で向きも含めて互いに移り合うことと定義します。)

絡み目に向きをつけると、図式における交点の上下が【図10】のうちいずれかの状況になっていることが分かり、それぞれに $+1$ または -1 という符号を与えます。



【図10】向きのついた絡み目の図式の交点における符号

向きのついた絡み目の図式 L ですべての交点における符号を足した数をひねり数 (writhe) と呼び、 $w(L)$ で表します。【図11】では、向きのついた絡み目の図式たちのひねり数を計算しています。

証明は割愛しますが、ひねり数がライデマイスター移動によってどのように変化するか調べてみると、(RII) と (RIII) では不変であり、(RI) の前後では ± 1 だけ変化することが確かめられます。

そこで、ブラケット多項式とひねり数を使って、新しい多項式 $f(L)$ を次のように定義します。

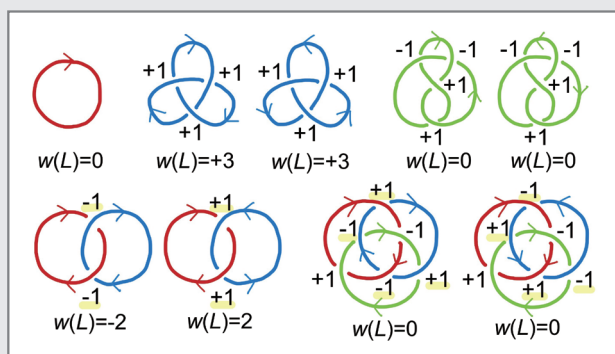
$$f(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$$

この $f(L)$ が向きのついた絡み目の不変量となるか調べると、まず、(RII) と (RIII) の前後ではブラケット多項式 $\langle L \rangle$ とひねり数 $w(L)$ が不変であったので、 $f(L)$ 全体も不変であることが分かります。次に、(RI) について観察すると、(RI) の前後でブラケット多項式が $-A^{\pm 3}$ 倍だけ変化すること、ひねり数が ± 1 変化することがうまく打ち消しあって、 $f(L)$ 全体は (RI) により変化しないことが分かります。

以上をまとめると、(RI) で変化してしまうもの同士を上手く組み合わせることで、向きのついた絡み目の多項式不変量 $f(L)$ を作ることができました。そして、 $f(L)$ において変数 A を $t^{-1/4}$ に置き換えて得られる変数 t の多項式こそが、ジョーンズ多項式です。

ここで、絡み目への向きの入れ方に視点を戻しましょう。【図11】からも分かるように、2成分以上の絡み目では向きの入れ方によって交点の符号が変わるため、結果的にひねり数も変化してしまいます。しかし、(1成分のみである) 結び目の場合は、2通りあるどちらの向きを入れても交点の符号が変化しないため、当然ひねり数も等しくなり、向きの入れ方によるひねり数の変化はありません。つまり、ジョーンズ多項式を定義する際に導入した向きの構造をあえて忘れることで、ジョーンズ多項式は、(向きのついていない) 結び目の不変量として使えるのです。

それでは、いくつかの結び目について具体的に計算してみましょう。まず、自明な結び目は、ブラケット多項式 $\langle \bigcirc \rangle = 1$ とひねり数 $w(\bigcirc) = 0$ より、ジョーンズ多項式は1です。三葉結び目は、【図7】からブラケット多項式が $-A^5 - A^{-3} + A^{-7}$ 、【図11】からひねり数が3なので、



【図 11】 向きのついた絡み目の図式のひねり数

$$f(L)=(-A^3)^{-3}(-A^5-A^{-3}+A^{-7})=A^{-4}+A^{-12}-A^{-16}$$

であり、ジョーンズ多項式は $t+t^3-t^4$ です。さらに、【図 12】の通り、三葉結び目と 8 の字結び目のジョーンズ多項式が異なることから、これらは異なる結び目であり、自明な結び目でもないと自信を持って断言できます。このように、不変量を使うことで「頑張っても変形できないから、おそらく違う結び目だと思う」という感覚を、数学的に保証することができました。

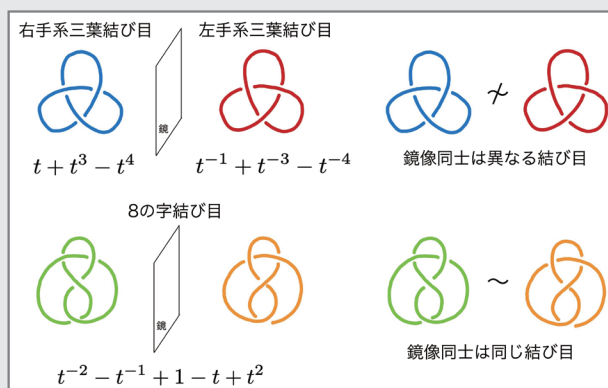
■ 鏡像との関係

ところで、【図 12】をよく見ると、今まで見てきた三葉結び目と、それを鏡に映した見た目の結び目が並んでいます。このような、全ての交点の上下を入れ換えて得られる結び目を、元の結び目の鏡像 (mirror image) といいます。そして、ある結び目が自身の鏡像と同じ結び目であるとき、その結び目を両手型結び目 (amphicheiral knot) といいます。

8 の字結び目は、鏡像同士で移り合うライデマイスター移動の列を見つけることができるので両手型です。(変形を考えてみてください) 三葉結び目は、【図 12】を見ると鏡像同士のジョーンズ多項式が異なるという計算結果が示されているので、両手型ではありません。

よって、8 の字結び目が 1 種類であるのに対し、実は三葉結び目には 2 種類あり、「右手系」「左手系」と呼んで区別しています。

さらに興味深いことに、鏡像同士のジョーンズ多項式は t と t^{-1} を入れ換えて得られることが示されています。そのため、両手型結び目の場合は、 t と t^{-1} を入れ換えて得られるジョーンズ多項式が元の式と一致するため、8 の字結び目のように必ず「回文的」なジョーンズ多項式を持つことが分かります。



【図 12】 三葉結び目と 8 の字結び目のジョーンズ多項式

■ 他分野への応用

結び目理論は、それ自体が数学における興味深い研究対象ですが、現在、物理学や化学、生物学や医学など様々な分野への応用研究も進んでいます。

例えば、自然界には大腸菌など、両端が閉じた輪になっている（つまり、まさに絡み目になっている）環状 DNA をもつ生物が存在しています。ある酵素は DNA の特定の塩基配列に作用して、切断して繋ぎ直すことで DNA を変化させますが、実際の反応の様子は小さすぎて観察することができません。そのため、組み換え前後の絡み目の変化を、結び目理論を使って解明することが重要な手がかりになります。

今後も、それまで想像もつかなかった分野へ綺麗な橋が架かるかもしれません。

■ おわりに

結び目理論は、柔らかな幾何学とも呼ばれる位相幾何学 (Topology, トポロジー) の一分野です。筆者は大学 4 年生のゼミで初めて結び目理論に出会い、その面白さや奥の深さに魅了され続け、気づけば今日に至ります。本稿でご紹介できたのは、多様な分野と関連しながら裾野を広げる結び目理論の、ほんの入り口に過ぎませんが、読者のみなさんに少しでも結び目の魅力が伝わり、結び目と数学の関係を楽しんでいただけたら幸いです。

参考文献

- ・ C. アダムス (著) 金信泰造 (訳)、結び目の数学、丸善出版。
- ・ トマス・フィンク、ヨン・マオ (著) 青木薫 (訳)、ネクタイの数学、新潮社。
- ・ L. H. Kauffman, New invariants in the theory of knots, American Mathematical Monthly, 95 (1988), 195-242.