トロピカル幾何学の最前線

―トロピカル幾何学に親しみ，最近の発展に触れる―

東京都立大学 理学部 数理科学科 准教授　小林（こばやし）　正典（まさのり）

1．はじめに

幾何学は円や三角形といった「かたち」について研究する学問です．紀元前にユークリッドによって整備されたもの（三角形の合同条件，平行線の錯角など）が現在でも「初等幾何」として学ばれています．17 世紀にデカルトにより座標が導入され，点を数の組として表すようになりました．すると高校数学の「図形と式」で扱われるように，例えば平面の直線は一次方程式 $ax+by+c=0$ で表せます．さらに精密化した「代数幾何学」は，日本人 3 名がフィールズ賞（数学のノーベル賞ともいわれる賞）を受賞している日本で研究が盛んな分野の一つです．

直線の方程式には掛け算と足し算を用いていますが，近年これを「トロピカル代数」に置き換えたものから，興味深い幾何学ができることがわかってきました．トロピカル代数自体は以前から数学・情報理論・制御理論などで使われてきましたが，代数幾何学と結びつくことで，可視化され深い内容をもちます．平易かつ応用があるので高校での「探究」の題材にもなりうるのではと思います．本稿ではこの「トロピカル幾何学」についてご紹介し，最近の状況や筆者らの結果にも触れていきます．主要な文献は，参考文献 1)の文献表や訳者あとがきからたどることができます．

2．トロピカル幾何学とは

2．1　トロピカル代数

トロピカル代数での計算例を見てください．

$$1+1=1,\quad 1\times 1=2$$

間違いに見えますが次の t の式の次数を見ましょう．

$$t+(t+3)=2t+3,\quad t(t+3)=t^2+3t$$

1 次式 t と 1 次式 $t+3$ に対し，和は 1 次式であり積は 2 次式です．先の等式は次数についての演算とみると辻褄が合います．式の係数に負の数が現れないとすると，式の足し算で次数は最大値になり，式の掛け算で次数は足し算になります．

この計算は奇妙に見えますが，普通の演算の漸近的挙動から生じることを説明します．変数 t の値が大きくなると，最高次の項に比べて低次の項の寄与は小さくなり，次数が次のようにして得られます．単項式 t^a に対しては t を底とする対数をとれば a になります．一般の t の a 次式 $f(t)=ct^a+$（低次）に対しても，絶対値の対数をとり t を無限に大きくした

$$\lim_{t\to\infty}\log_t|f(t)|$$

にすれば余計な部分は消えて a になります．この「対数極限」操作を関数の「トロピカル化」と呼びます．

トロピカル化で足し算は最大値になり，掛け算は足し算になることが確かめられ，普通の加法と乗法の代数から，最大値と加法の代数が得られます．これを「トロピカル代数」と呼びます **【図 1】**．最大値の代わりに最小値で考える流儀もありますが，本質的に変わりません．トロピカル化したあとの演算も同じ＋や×で表しますが，本来の演算と紛らわしいので，以後トロピカル演算を表すときは二重引用符 “ ” で囲うことにします．普通の代数の分配法則 $(f(t)+g(t))h(t)=f(t)h(t)+g(t)h(t)$ が成り立つことから，トロピカル代数でも “$(a+b)c$”＝“$ac+bc$” が成り立つことが従います．“$c(a+b)$”＝“$ca+cb$” も同様です．

トロピカル演算は普通の演算と完全に同じではありません．特に大きな違いは，引き算ができないことです．普通は $x+a=b$ のとき $x=b-a$ です．トロピカル演算で “$x+a$”$=b$ とは x と a の最大値が b ということです．しかし $a>b$ のときはそんな x は存在しませんし，$a=b$ のときは x は a 以下なら何でもよくなるので，x が定まりません．このような緩い対応でもよいとする「超体」という枠組みもありはしますが，精密さに欠けるため引き算は諦めます．他は機械的にできますが，慣れるまで奇異に感じそうなことを挙げておきます．まず $a+0=a$ を満たすゼロに対応するものとして，数に負の無限大 $-\infty$ を追加します．どんな実数よりも小さい数なので，

$$“a+(-\infty)”=a$$

を満たします．負の無限大を数として迎え入れるのには心理的抵抗があるかもしれませんが，トロピカル代

数での計算は問題なくできて，$a\times 0=0$ に対応する

$$“a\times(-\infty)”=-\infty$$

も成り立ちます．$a\times 1=a$ の 1 に対応するのは

$$“a\times 0”=a$$

になります．これらは $\log 0=-\infty$，$\log 1=0$ から納得できるでしょう．さらに加法は冪等性

$$“a+a”=a$$

を満たします．足しても足しても変わらないのは変な感じですが，冪等性は「$a+b=b$ のとき $a\leq b$」により順序（大小関係）「$\leq$」と対応し，順序に起因するという意味では自然な条件なのです．

2. 2　トロピカル多項式関数

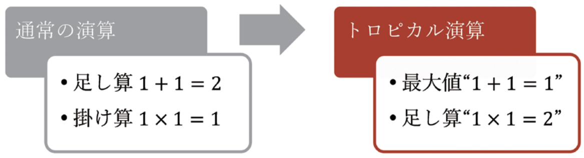
関数や方程式も考えてみましょう．変数 x,y から掛け算により x^2y のような単項式ができます．足し算も用いると $x^2y-3x+y+2$ のような多項式ができます．この掛け算と足し算をそれぞれ足し算と最大値に置き換えて「トロピカル多項式」が得られます．トロピカル単項式 “X^2Y” は普通の演算では，$2X+Y$ となり 1 次式です．冪は自然数（ときに負の整数）なので 1 次式の係数もそうです．トロピカル多項式は各項（一次式）の最大値を表します．

【図 2】の左はトロピカル多項式関数

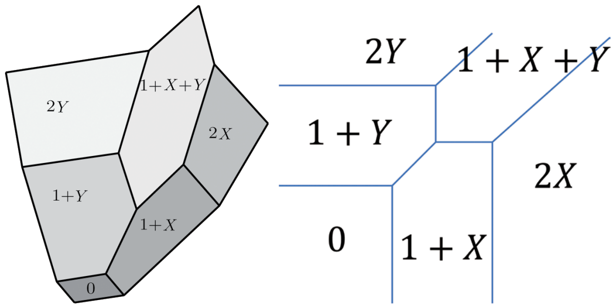
$$F(X,Y)=“X^2+1XY+Y^2+1X+1Y+0”$$

のグラフです．係数の 1 が奇異に見えますがトロピカル 1 倍は 1 を足すことなので省略できません．反対にトロピカル 0 倍は 0 を足すことなので省略できます．変数の値に応じてどの項が最大値をとるかが変化するので，グラフは平らな面が折れた図形になります．例えば図の左下の部分では X,Y が（-1）以下なので最後の項 0 が最大値を与えています．図の右は折れる部分を XY 平面に図示したもので，この青い折れ線図形 $V(F)$ を F が定める「トロピカル超曲面」と呼びます．今の場合は「トロピカル曲線」ともいいます．

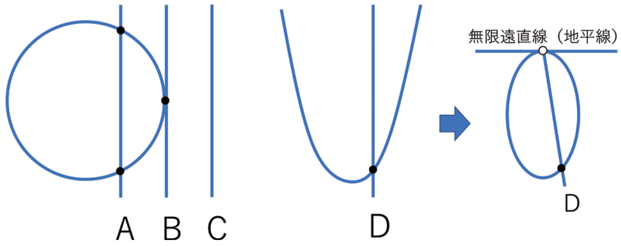
方程式 $f(x,y)=0$ があると解集合として曲線が定まるのが普通です．方程式が $x^2+y^2=1$ なら単位円です．この意味ではトロピカル曲線はグラフの折れた部分ですと言われても違和感がありますが，実は $f(x,y)=0$ の解集合を，座標ごとに対数極限で移した図形になっているのです．理由を説明しましょう．多項式 $f(x,y)$ に大きな数 $x=t^X$，$y=t^Y$（t を大きくする）を代入して 0 になるとすると，一つ一つの項は大きいため，どこかで打ち消しあって 0 になっています．それらの項は t について同じ次数をもっていて，係数



【図 1】トロピカル代数



【図 2】トロピカル多項式のグラフ・トロピカル超曲面



【図 3】曲線の共有点

の和が 0 になるから消えるわけです．トロピカル化して関数の増大度だけを見ると，複数の項が同じ増大度をもつところ，すなわち各項が最大値を与える部分が交わるところが像になっているわけです．これは厳密に定式化して証明できます（カプラノフの定理）．

2. 3　トロピカル幾何学の利点

なぜ方程式の解集合をトロピカル化するのでしょうか？　実数の範囲では扱いにくいことがあるので「複素化」「重複度」「射影化」を施すのが代数幾何の常套手段なのです．2 次曲線と直線の共有点で説明します．

【図 3】の左は円と直線の関係を示しています．位置関係によって共有点の個数が変化し，直線が A の位置にあるときは 2 点で交わり，B のときは 1 点で接し，C のときは共有点をもちません．円の方程式 $x^2+y^2=1$ に直線の方程式 $x=a$ を代入すると，y の 2 次方程式が現れて，それぞれ y が 2 実解・重解・2 虚解をもつ場合に対応します．複素数の範囲で考えて，重解を 2 個と数えれば，すべて 2 個．簡明です．

右の D は放物線と直線との交点です．放物線が 2 次方程式 $y=x^2$ などで与えられるのに共有点は 1 点しかありません．平面にある図を斜め上から見たのが

一番右の図です．まっすぐ延びた線路が遠くで同じ点に向かって見えるように，放物線や直線は地平線の同じ白丸の点に向かって延びていくことが示せます．そこで地平線上の点（無限遠点）も加えることで，2つめの交点とすると，この場合も交点は2個となります．

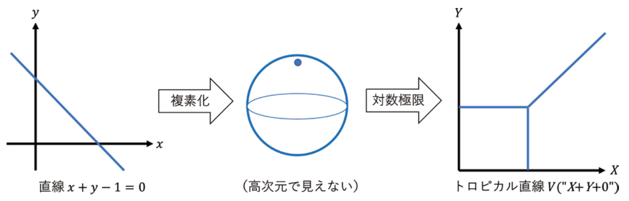
解が実数か，重解か，有限かという条件は，最初から考えると問題が複雑になるので，解いた後で吟味します．

上の操作でできた複素射影空間は代数と幾何の対応がうまくいく理想郷ですが，複素化したことで次元が倍になり（複素 xy 平面は実4次元），射影化したことで全体を一望できなくなりました（1組の座標系では全体を扱えません）．幾何学なのに図示できません．

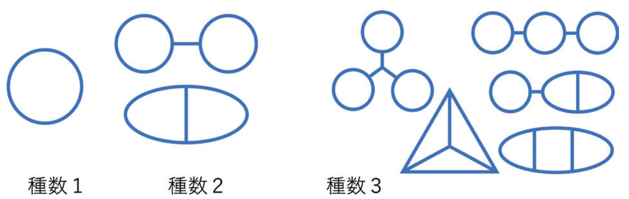
そこで座標の絶対値をとって実次元に戻し，さらに対数もとって底で俯瞰度を調整できるようにしておきます．実数解だけ取り出す最初の状況と異なり，どんな複素数に対しても絶対値が存在するので，解をとりこぼすことはありません．ただし異なる点が絶対値をとると重なることがあるので，重複度を適切に定める必要はあります．こうして対数極限写像が導入され，トロピカル幾何学の嚆矢の一つとなりました．

xy 平面内の直線 $x+y-1=0$ について，複素化してトロピカル化したものが**【図4】**の右の青い線です．すでに述べたように，これは関数 $x+y-1$ のトロピカル化 "X＋Y＋0" のグラフが折れている点集合と一致します．

複素射影化すると，m 次曲線と n 次曲線は（共通成分をもたなければ重複度を込めて）ちょうど mn 個の交点をもちます（「ベズーの定理」）．トロピカル幾何学でも重複度が適切に定義されて，対応する定理が示されました．この頃からトロピカル代数を用いた代数幾何学が成立し「トロピカル幾何学」と呼ばれるようになりました．



【図4】複素化と対数極限写像



【図5】トロピカル曲線

対数極限写像で個々の点はほぼすべて原点に移ってしまいます．また方程式自体もトロピカル化で係数がほぼ0（か負の無限大）になってしまいます．このようにモノクロでつまらない世界になってしまう難点は，数の範囲を複素数から t の式にさらに拡張することで回避されます．このとき対数極限写像は次数に似た「非アルキメデス的絶対値」を用いて与えられます．これは通常の絶対値が満たす「三角不等式」

$$|x+y|\leq|x|+|y|$$

よりも強い「超三角不等式」

$$|x+y|\leq\max\{|x|,|y|\}$$

を満たします．これから $|x-y|$ で与えられる x と y の距離には，「超距離」（ウルトラメトリック）というかっこいい名前がついています．

3. トロピカル幾何学の発展

3. 1　古典理論との対応を越えて

ベズーの定理を越える最初の衝撃はグロモフ・ウィッテン不変量の計算でした．これは素粒子物理学に出自をもつ一種の交点数ですが，定義も計算も複雑です．それをトロピカル化で折れ線の数え上げに帰着して同じ数を与えられることをミハルキンが示し，トロピカル幾何学の知名度が一気に上がりました．

トロピカル曲線は平面内では折れ線グラフに見えましたが，入れ物を考えないときは**【図5】**のようなグラフで各辺に長さ（計量）が定まった「距離付きグラフ」になります．辺の途中の点も図形の点として扱います．穴の数を複素代数幾何との関係から「種数」と呼びます．距離付きグラフは，生物の進化系統樹で種が分化する間の経過時間がついているようなグラフです．実際に進化系統樹は種数0のトロピカル曲線として，目録の空間が構成されています．トロピカル曲線は素朴な対象に見えますが，驚いたことに，代数幾何学の極めて精緻な基本定理である「リーマン・ロッホの定理」がトロピカル曲線の上でも定式化できて成り立つことが示されました．さらに古典代数曲線論の代表的結果である「ブリル・ネーターの定理」が，トロピカル幾何版を通じて同時に平易な証明が与えられました．これらはトロピカル曲線自体が幾何的対象として十分に豊かな対象であることを示しています．

しかし引き算がないために技術的な制約があります．代数幾何学での標準的な不変量（層係数コホモロジーなど）が使えませんし，線形空間の次元も簡単ではありません（ベクトル列の最大独立系と最小生成系が同値にな

りません）．一から道具を構成することで，トロピカル曲線の埋込定理や有理関数体の有限生成性といった一般的な結果が宋珠愛により与えられています．

３．２　異分野間の懸け橋

代数幾何学にとどまらず，超ひも理論から予言されたミラー対称性においても，トロピカル幾何学を共通の基盤として構成的に示せるはずだという予想も出され，一躍問題の宝庫になっています（未解決）．

2022 年にはトロピカル幾何を用いた研究でホ・ジュニがフィールズ賞を受賞しました．研究対象は「マトロイド」の組合せ論でした．マトロイドは一見まったく異なる概念に見えるものに，実は共通した構造があるとして抽出された概念です．線形代数におけるベクトルの集合の線形独立性や，グラフ理論における辺の集合が閉路を作らないこと，といった概念が，共通の公理化をもち同様に扱えるようになります．すると線形代数で計算した結果がグラフ理論の結果に翻訳できるのです．またマトロイドはトロピカル多様体の座標近傍でもあり，代数的な概念だったマトロイドが幾何的な実体をもち，豊かな代数幾何学の結果と結びつきました．ホ氏は一般の想定より遥かに精緻な代数幾何学の結果（ホッジ理論）がトロピカル幾何学を通じてマトロイドにも読み替えられることを見出し，組合せ論の未解決問題を解きました．今後も異分野間の対応から豊かな数学が生まれることが期待されます．

4．工程計画問題への応用

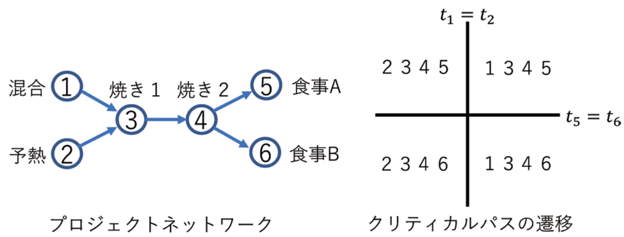
最後にトロピカル幾何学の応用として，筆者と小田切真輔氏の共同研究について触れます[2)]．

ホットケーキを作って 2 人で食べるとします．工程は次の通りです．カッコ内は所要時間です．

（1）材料を混ぜる（1 分）（2）予熱する（2 分）
（3）片面を焼く（3 分）（4）裏返して焼く（2 分）
（5）A が食べる（3 分）（6）B が食べる（5 分）

作業（1）（2）は並行してできますが，両方終わらないと（3）に取り掛かれないので，**【図 6】**の左のように作業に順序があります．このように，いくつかの作業に順序が指定され．それぞれの作業時間が与えられたものを「プロジェクトネットワーク」といいます．

さて全部で最低何分必要でしょうか？　上の場合は，作り始めてから作業 3 を開始するまでに作業 2 が律速段階になり，2 人とも食べ終わるまでには，最低



【図 6】工程計画問題の可視化

2＋3＋2＋5＝12 分かかります．

各作業は，前提となる作業がすべて完了してから着手できるので，前提作業の最短完了時間の最大値にその作業にかかる時間を加えたものが，その作業の最短完了時間になります．帰納的に，全体の最短完了時間は，各作業に掛かる時間から，最大値と加法を用いて表せます．最大値と加法は分配法則を満たすので，整理すると作業時間のトロピカル多項式になります．この際，多項式の各項は前後する作業時間を直列にすべて加えたものになり，この作業列は最大値を与えるとき「クリティカルパス」と呼ばれます．どこかの作業時間を減らすことで全体の時短を目指すなら，クリティカルパス上の作業を選ぶ必要があります．この技術は PERT や CPM の名前で発展してきました．

作業の効率化や不慮の事故等で作業時間が変化すると，クリティカルパスが変化することがあります．そのとき近いパスと遠いパスがあることを定性的に捉えたのが我々の研究です．最短完了時間はトロピカル多項式であり，対応するトロピカル超曲面がクリティカルパスの遷移面であることがわかり，現在のクリティカルパスから直接遷移できるクリティカルパスの候補を予め限定して予測することができます．〔図 6〕の右は，作業時間が十字に区切られた 4 つの領域にあるときのクリティカルパスを作業番号で示したものです．作業時間が十字の壁を横切るときにクリティカルパスの遷移が起こります．必ず縦か横の遷移を伴います．

トロピカル代数を用いて，様々な現象を扱いやすいモデルで表せますが，さらに幾何学と結びつけることで，可視化して幾何的直観を用いたり，幾何的概念を導入したりすることができるようになります．この分野はまだ若く，これから多くの人が参入して発展することを期待して已みません．

［参考文献］

1）Introducion to Tropical Geometry, D. Maclagan, B. Sturmfels, Amer. Math. Soc., 2015（邦訳：トロピカル幾何学入門，石川・梶原・小林・前野訳，丸善出版，2023）

2）トロピカル幾何による工程計画問題の可視化，小林正典，計測と制御 52 巻 12 号（2013）