特集

現代代数学の深化と広がり

抽象化による現代代数学への深化

東京理科大学 創域理工学部 数理科学科 教授　伊藤　浩行

人類の生活において個数を数える，量を測るという観点から「数」（すう）は生活に密着したものであり，有史以前より数は数えられてきたことであろう．紀元前 3000 年以降，エジプトやバビロニア，そしてギリシアにおいては，数の演算や種々の方程式が解かれていたようである．特に，バビロニアにおいては 2 次方程式の問題が解かれていた記録があり，ギリシアでは無理数の存在が認知され，最大公約数を求める互除法や素数が無限個あることを記述したエウクレイデス原論や諸学派における論証技術，プラトンによる 5 種類しかない正多面体を用いた物質世界の記述などから，いずれの地域においても基本的な「数学」が発達していたと考えられる．これらの時代に扱われていたものは，主に数，特に（正の）整数や有理数であり，そこでの演算は加法（+）と乗法（×）である．この数を代数的に扱うことが，この後の数千年にわたる一般化，抽象化，体系化を経て，現代代数学へと繋がることになる．

整数そのものの性質を探究することから多くの難問が出され，その解決のために新しい概念や手法が生み出され代数学は発展してきた．時代は大幅に下るが，17 世紀初頭の代数方程式の解法の探究やフェルマーによる予想（定理）などは，整数や多項式の理論構築に大きく寄与したと言える．また，デカルトによる座標幾何の発見やニュートン，ライプニッツ等による微積分の発明の影響もあり，数の理論や方程式論はさらなる一般化が繰り返されることで，整数論を中心とした代数学は大きく発展してきたと考えられる．

19 世紀も終わりに近づいたところで，それまでの個々の対象の一般化からさらに，**抽象化**という道程を経て，その代数構造を抽出し普遍化された理論構築を行うことで**現代代数学**が始まったと言える．

全ての整数からなる集合を Z と書くことにする．集合 Z においては加法（+）と乗法（×）が主にそこ

で活躍する演算であり，いずれも三つ以上の整数に対しての演算を保証する結合法則，加法における 0 や乗法における 1 の役割を果たす単位元の存在，加法の逆の操作を可能とする逆元（マイナス）の存在，そして演算の順序を変更しても結果に影響がないという可換性，両演算が整合性をもって自由に計算可能となるための結合法則，といった性質を取り出すことで，一つの演算によって構造が定義される「（アーベル）**群**」，二つの演算によって構造を考える「（可換）**環**」，そして 0 以外の元については乗法の逆元が存在するという性質を追加することで構造が確定する「**体**」という抽象概念に到達する．**（佐藤氏論説）**

抽象化することで得られるご利益として，同様の構造が $\mathbf{Z}$ にとどまらず，様々な集合に対して定義することが可能となり，また，演算である「加法」「乗法」も上述の条件を満たすものであればどのようなものでも良い（いわゆる足し算や掛け算である必要はない），という高度な汎用性が与えられる．例えば，実数全体がなす集合を $\mathbf{R}$ と書き，これに便宜的に「$-\infty$」という記号を付け加えた集合として $\mathbf{R}_{\max}$ と記述することにし，$-\infty$はどんな数よりも小さいものと約束する．このとき $\mathbf{R}_{\max}$ に「加法」として二つの元のうち大きいほうを与える演算とし，「乗法」として通常の実数の足し算（$-\infty$についてはどのような実数を$-\infty$を加えても値は変わらないものと考える）とすることで，可換環に近い構造が入る．（「加法」の逆元が存在しないので，（可換）半環と言う．）このような（半）環を考え，それに基づいて幾何学を考えることで全く新しい**トロピカル幾何学**が誕生する．**（小林氏論説）**

さて，整数から群，環への抽象化を例にみたが，今度は代数学を多項式（方程式）の観点から見てみよう．代数方程式の解法（公式）が追求されたのは実はバビロニアよりはだいぶ後であるが，18 世紀末には 2 次，3 次，4 次の代数方程式の具体的解法は周知の事実であったようである．しかしながら 5 次以上の方程式に関しては多くの数学者による研究にもかかわらず 19 世紀に入ってからのアーベルやガロアの仕事を待たなくてはならなかった．今日ガロア理論として知られている，方程式の可解性について群論を用いて記述するアイディアはこの頃に端を発している．また，方程式として整数を係数とするものを考え，その整数解や有理数解を考えることによりフェルマーの予想（定理）にあるような不定方程式を扱うことができる．このように整数や有理数を係数とする多項式の零点集合を幾何学的にとらえ，その整数解や有理数解に関する種々の問題を解決するという，**数論幾何学**は 20 世紀後半になってから大きく発展した分野である．**（吉川氏論説）**

一方，連立方程式に目を向けると，1 次方程式，すなわち線形方程式系は，線形代数の理論として今日の理工系諸分野での常識的手法として知られているが，高次の連立方程式については，その完全な解法アルゴリズムが与えられたのは意外にも 20 世紀後半であると言って良い．それには，デカルトにより導入された座標幾何に端を発し，代数方程式の解を多項式の共通零点という見方をすることで，解空間の幾何学を代数的に扱う**代数幾何学**や可換環論の発展が必要であった．代数幾何学は 20 世紀後半のグロタンディークによる高度な抽象化による再構築を経て，多くの研究が開花し成果が量産された．**（松本氏論説）**

その中に，標数 0 の体（実数体や複素数体など）の上に定義された代数多様体（多項式の共通零点に幾何学的構造を入れたもの）は，その特異点をある種の操作により解消（特異点のない多様体に）できるという，いわゆる特異点解消問題の解決がある．極めて難解で定理の証明を記述した廣中による論文は 200 ページを超えるものであるが，その証明の中で用いられた一つの概念と手法が，同時期にグレブナーやその弟子ブックバーガーにより独立に考えだされた**グレブナー基底理論**である．全く抽象的な定理の証明のために考えだされた概念が一つの大きな理論として確立され，今日の多くの応用的場面で必要不可欠な道具となっていることは驚きである．これも抽象化により汎用性をもち，それにより予期せぬ場面への応用が得られている好例であると言える．**（鍋島氏論説）**

このように，一般化，抽象化，体系化によって代数学が現代代数学として多くの分野を創り出し，20 世紀，21 世紀の数学に多くの彩りを添え，同時に数学にとどまらず周辺分野へ大きな発展を促した影響は非常に大きいものである．20 世紀後半からは代数学に親和性が高い情報系諸分野への応用も始まった．符号理論などの情報通信分野，暗号理論などの情報セキュリティ，高度に抽象的である圏論の計算機科学への応用，代数多様体の学習理論への応用，グレブナー基底の実装による数式処理システムの高性能化，代数統計など，多くの分野への影響・応用があり，枚挙にいとまがない．今後の予期せぬ展開から起こるイノベーションへ期待を馳せて，抽象化による現代代数学の深化を実感していただける本特集の概観を終わることとする．