高周波燃焼振動の時空ダイナミクスを複雑系科学から理解する

東京理科大学 工学部 機械工学科 教授 後藤田 浩（ごとうだ ひろし）

■ はじめに

反応物の拡散と混合，化学反応による急激な発熱，対流を伴う燃焼では，多様な時空ダイナミクスが創発される．燃焼の時空ダイナミクスの理解が難しい理由の一つとして，強い非線形性が挙げられる．化学反応過程における物質の質量保存を表す支配方程式，いわゆる化学種の保存式の反応項には温度の指数関数が含まれており，温度に対する強い非線形性を有する．また，反応物の流動を記述するナビエ-ストークス方程式の対流項には，速度と速度勾配の積で表される非線形項が含まれている．このように，燃焼は化学的・流体力学的側面からの強い非線形性を有する反応性熱流体である．そのため，複雑系科学の考え方が燃焼の時空ダイナミクスの理解に重要となる．

筆者の研究室では，力学系理論，情報理論，記号力学，同期理論とネットワーク科学が融合した先進的な複雑系科学の観点から，様々な燃焼の時空ダイナミクスを明らかにしている[1)]．本稿では，宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 数値解析技術研究ユニットとの共同研究として実施された高周波燃焼振動の時空ダイナミクスと形成メカニズム[2, 3)]の一端を紹介する．

■ 燃焼の不安定現象

燃焼には多様な不安定現象が観察される．それらの多くには互いに異なる現象が混在しており，不安定現象の完全な分類は難しい．例えば，Forman A. Williams の著書[4)]によれば，系の構成要素に基づいて不安定現象が分類されている．拡散-熱的不安定や流体力学的不安定などの固有不安定，燃焼器内の音響不安定や衝撃波不安定などの容器内不安定がある．これらは観察される不安定現象によって異なった名称で呼ばれることもある．筆者らは固有不安定に関して，ヘレショウセル内を伝播する火炎を対象とした研究を行っている[5)]．また，音響不安定に関して，産業用ガスタービン，航空エンジンとロケットエンジンを対象とした研究[2, 3, 6, 7)]を行っている．後者の音響不安定は燃焼不安定，もしくは燃焼振動と呼ばれ，熱音響自励振動の一つとして知られる非線形現象である．燃焼振動は燃焼器の致命的な破損を引き起こすことから，燃焼振動の時空ダイナミクスや形成メカニズムの詳細な解明，ならびに予兆検知法の構築が航空宇宙・燃焼分野において望まれている．

燃焼振動の基本的な維持機構を簡単に説明する．(i) 乱れによって生じる火炎の発熱率変動が燃焼室内で固有な音響振動を誘起させる．(ii) 音響振動による圧力波が燃焼器の上流に伝播し，噴射器内の燃料／酸化剤に速度変動が生じる．(iii) 速度変動が発熱率変動に作用することで，圧力変動も影響を受ける．(i)-(iii) のフィードバック[8)]が燃焼振動の維持に重要な役割を担っている．ここで，燃焼現象を記述する多成分系の基礎方程式（連続の式，ナビエ-ストークス方程式，エネルギー方程式，化学種の保存式）から導出される音響エネルギー方程式[8)]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{u}'|^2+\frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0 a_0^2}\right)+\nabla\cdot(p'\mathbf{u}')=\frac{\kappa-1}{\rho_0 a_0^2}p'\dot{q}'$$

に着目して，燃焼振動の駆動源を説明する．ただし，ρ_0 を密度の平均値，$\mathbf{u}'$ を速度変動，a_0 を音速，κ を比熱比，p' を圧力変動，$\dot{q}'$ を発熱率変動とする．

音響エネルギー方程式の左辺の第 1 項は音響エネルギー密度項，第 2 項は音響エネルギー流束項，右辺は音響エネルギー生成項に対応する．ここで着目すべき項は音響エネルギー生成項であり，圧力変動と発熱率変動の積として表される．このことは，圧力変動と発熱率変動の相互作用が燃焼振動の駆動に重要な役割を担うことを意味している．

■ ロケットエンジンの高周波燃焼振動

ロケットエンジンでは，強い圧力変動によって燃焼室の壁面に亀裂が発生するだけでなく，燃焼室壁面への熱負荷が燃料／酸化剤の噴射器出口の溶損を引き起こす．そのため，燃焼振動の発生はロケットエンジン開発において重大な問題とされてきた．旧ソ連のスプートニック計画と対峙した米国航空宇宙局は，世界初

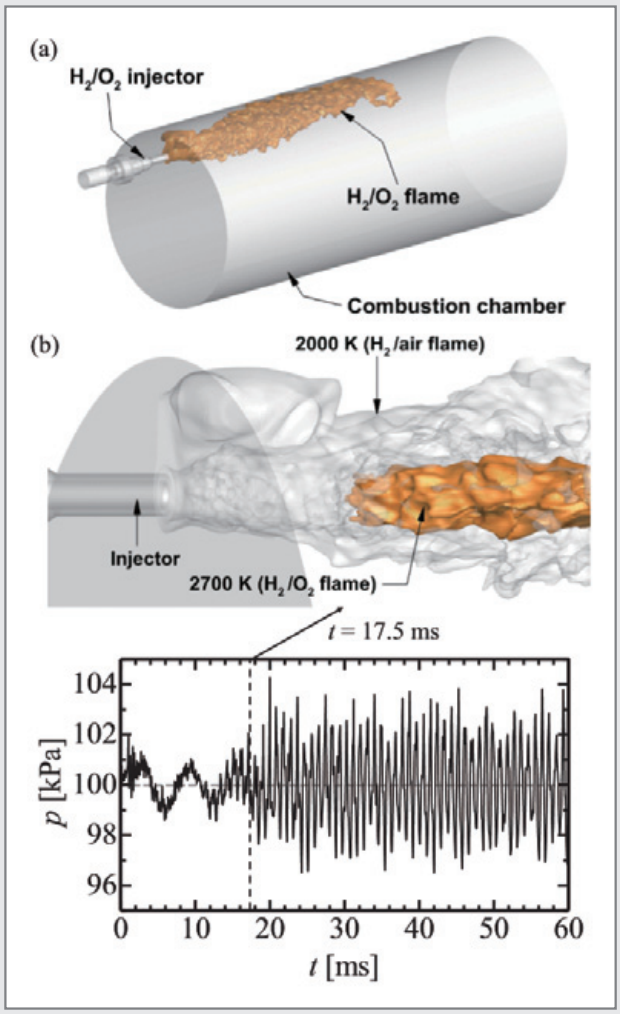
の月面着陸を目指したアポロ計画を実行し，サターンV型ロケットF-1エンジンの研究開発中に燃焼振動が発生した[9]．また，欧州のアリアンスペースによるロケットエンジン開発，旧ソ連のソユーズに搭載されたRD-0110のエンジン開発でも燃焼振動が発生した[9]．さらに，国内のH-IIAロケットの後継として期待されるH3ロケットの開発においても，第1主エンジンであるLE-9エンジンで燃焼振動の発生が問題となった[10]．

ロケットエンジンでは，圧力変動の振幅の大きさによって，いくつかの燃焼状態に分類される．振幅が燃焼室内の平均圧力に対して約±5% 以内である燃焼状態は安定燃焼と呼ばれる．圧力変動が約±5% 以上の振幅を有し，周期的な変動を伴う燃焼状態は燃焼振動と呼ばれる．燃焼振動はその周波数帯によってさらに分類される．20〜200 Hzの周波数を持つ燃焼振動は低周波燃焼振動，200〜1000 Hzの周波数を持つ燃焼振動は中間周波燃焼振動，1000 Hz以上のものは高周波燃焼振動と呼ばれる[11]．実機のロケットエンジン燃焼器はフルスケール燃焼器と呼ばれ，数百本の噴射器から構成されている．本研究では，単一の噴射器から構成されるサブスケール燃焼器内の高周波燃焼振動を研究対象とする．

■ 高周波燃焼振動の時空ダイナミクスと形成メカニズム

本研究では，数値解析技術研究ユニットによって得られた高周波燃焼振動の数値シミュレーションデータ[12]を解析する．噴射器は燃焼室の中心軸に対して偏心に配置され，噴射器の中心円管から酸素が噴射される．酸素を取り囲む外側の円管スリットから水素が噴射され，時刻 $t=0$ ms で着火する．燃焼室の圧力は変動しながら，t〜20 ms で約1000 Hzの音響モードに対応する高周波燃焼振動が形成される【図1】．数値シミュレーションの詳細については，文献[12]を参照されたい．本研究では，圧力変動と発熱率変動の相互作用に着目し，同期理論の視点から，高周波燃焼振動の時空ダイナミクスと形成メカニズムを明らかにする．

状態空間内の軌道上を周回する自律的な周期運動は，リミットサイクル振動と呼ばれ，非線形力学系の解の一つとして生成される．リミットサイクル振動子の興味深い性質として，複数の振動子間の固有周期が異なっても，相互作用により同一の周期で振動することである．そして，振動子間の周期のみならず，位相差が



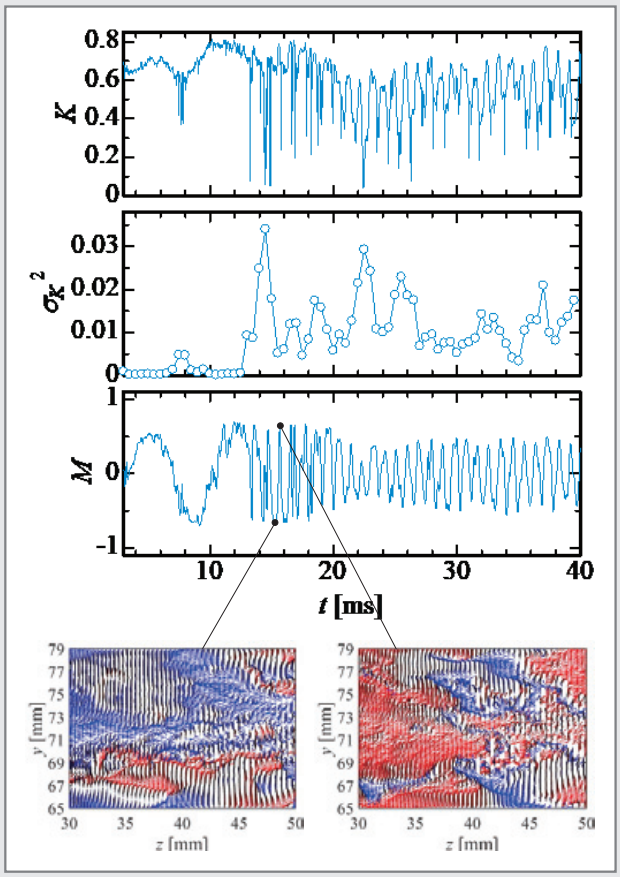
【図1】サブスケール燃焼器内に形成される高周波燃焼振動の圧力変動[2]

一致するときの同期状態は位相同期と呼ばれ，同相状態と逆相状態がある．振動子の状態を位相のみで近似的に表現した蔵本モデル[13]は，リミットサイクル振動子の同期状態を理解する上で重要である．蔵本モデルに基づく秩序変数はリミットサイクル振動子の同期状態を定量化したものであり，集団同期ダイナミクスの理解に有用である．筆者らは燃焼振動が自励振動であること，圧力変動と発熱率変動の相互作用によって維持されることに着目し，両者を互いに独立したリミットサイクル振動子と見立て，秩序変数 K と位相変数 M

$$K=\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N}e^{i\theta_k}\right|$$

$$M=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos\theta_k$$

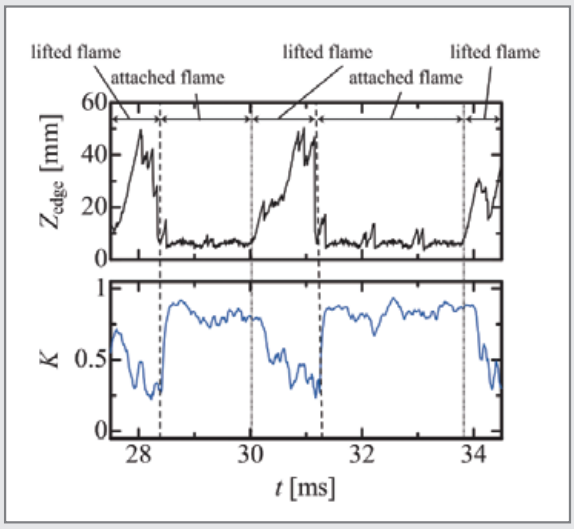
を求める．ただし，N を解析領域の計算格子数，θ_k を圧力変動と発熱率変動の位相差とする．振動子の同期状態が非同期であるとき，$K=0$ となり，位相同期であるとき，$K=1$ となる．また，位相同期が逆相で



【図2】秩序変数K，秩序変数の分散σ_K^2，位相変数Mの時間変化と瞬時の位相場[2)]

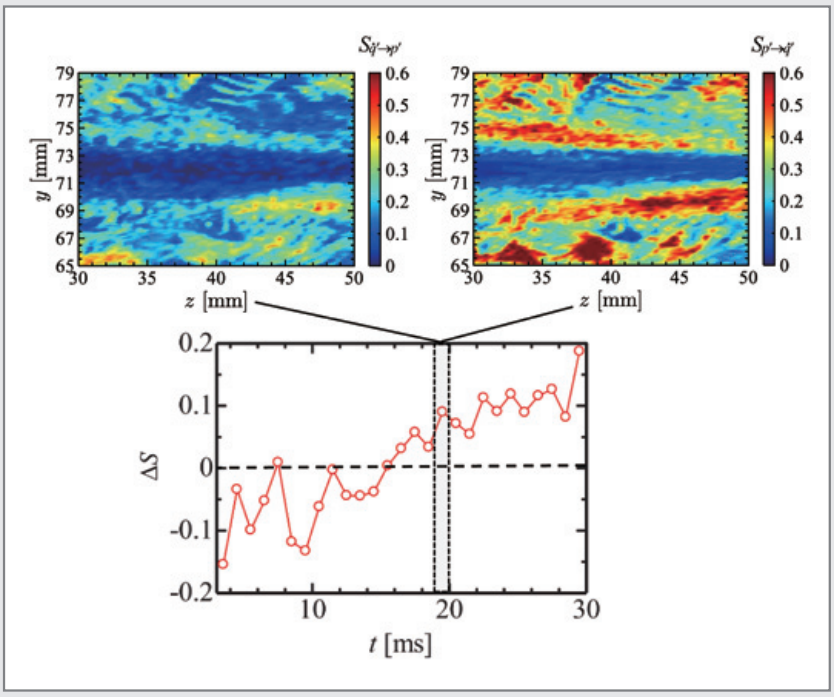
あるとき，$M=0$ となり，同相であるとき，$M=1$ となる．

【図2】に K，秩序変数の分散 σ_K^2 と M の時間変化と瞬時の位相場を示す．ただし，青色のベクトルは逆相，赤色のベクトルは同相を表す．高周波燃焼振動への遷移過程に対応する $t=12\sim13$ ms において，K と σ_K^2 は急激に変化している．M は周期的に変化し始め，同相と逆相が周期的に切り替わる．そして，位相場のコヒーレントと非コヒーレント構造が混在するキメラ状態が観察される．これらの結果は，秩序変数と位相変数が高周波燃焼振動の予兆を捉えていることを意味している．**【図3】**に高周波燃焼振動が形成されているときの火炎端位置 Z_{edge} と K の時間変化を示す．火炎端の噴射器への付着と離脱が繰り返される．火炎端が離脱（$Z_{edge}\approx45\sim55$ mm）しているとき，K は低い．火炎端が付着（$Z_{edge}\approx5$ mm）しているとき，K は高い．重要な点は，火炎端が付着しようとするときに，秩序変数の値が増加することである．つまり，離脱した火炎端が付着するときの大きな発熱率変動が，音響モードを増幅させるように同相のコヒーレント構造を誘起させている．このような位相同期のダイナミクスを伴って高周波燃焼振動が維持される．



【図3】高周波燃焼振動が形成されているときの火炎端位置Z_{edge}とKの時間変化[2)]

情報理論は，統計熱力学，計算機科学や統計的推論への寄与とともに進展してきた．そして，自己情報量，相互情報量や交差エントロピーなどが非線形科学の研究分野において広く用いられている．本研究では，情報理論に基づく移動エントロピーを用いて，高周波燃焼振動の形成に対する圧力変動と発熱率変動の因果関係を推定する．移動エントロピーの詳細については，文献[2)]を参考にされたい．**【図4】**に移動エントロピー差 $\Delta S(=S_{p'\to\dot{q}'}-S_{\dot{q}'\to p'})$ の時間変化と代表的な $S_{p'\to\dot{q}'}$ と $S_{\dot{q}'\to p'}$ の空間分布を示す．ただし，$S_{p'\to\dot{q}'}$ を圧力変動から発熱率変動への移動エントロピー，$S_{\dot{q}'\to p'}$ を発熱率変動から圧力変動への移動エントロピーとする．$\Delta S>0$ のとき，圧力変動から発熱率変動への情報流れが支配的であることを意味する．$t=16$ ms を超えると，ΔS の符号は負から正に変わり，ΔS は顕著に増加する．高周波燃焼振動の形成領域（$19\text{ ms}\le t\le20$ ms）に着目すると，$S_{p'\to\dot{q}'}$ と $S_{\dot{q}'\to p'}$ は水素／酸素火炎の形成領域[12)]で高くなるが，$S_{p'\to\dot{q}'}$ は $S_{\dot{q}'\to p'}$ よりも著しく高い．このことは，発達した高周波燃焼振動の形成に対して，圧力変動は発熱率変動よりも相対的に支配的であることを示している．圧力変動と発熱率変動の因果関係を情報理論の観点から明らかにした研究例は無く，本研究は米国物理学会 Physical Review E 誌の Kaleidoscope で取り上げられている．高周波燃焼振動の発生に関する重要な点として，$t=15$ ms のとき，σ_K^2 が最大となることである【図2】．このことは，圧力変動と発熱率変動間の情報流れの切り替わりが高周波燃焼振動の検知に重要であることを意味している．$t\ge16$ ms で増幅された圧力変動は，噴射器内の水素／酸素の流速に強く影響を与え[12)]，火炎端の離脱と

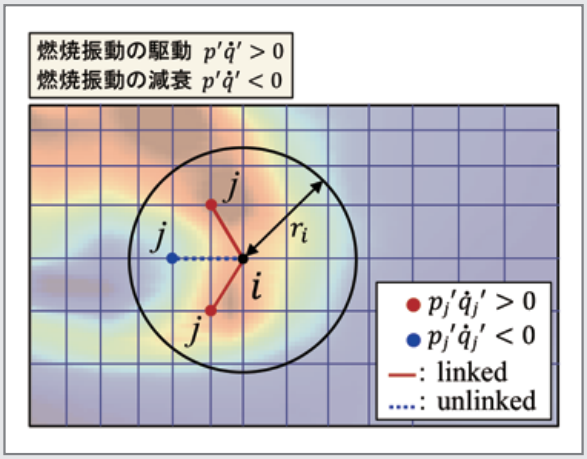


【図4】 移動エントロピー差ΔSの時間変化と代表的な移動エントロピー$S_{p'\to\dot{q}'}$と$S_{\dot{q}'\to p'}$の空間分布（文献[2]の図7と8を改変）

付着に起因する発熱率変動よりも支配的になる．このことが，高周波燃焼振動の形成に重要な役割を演じている．

ネットワークとは，対象物の要素が互いに接続されている系において，要素間の相互作用を抽象的に表現したものである．離散数学のグラフ理論に基づいて，ネットワークは要素をノード（頂点），要素間を繋ぐリンク（枝）の集合として表現される．多くのノード数と不均一性を持つネットワークは複雑ネットワークと呼ばれ，インターネット，交通網や電力網など，現実世界の身近なところで存在している．これらのネットワーク構造には，スケールフリー性やスモールワールド性が存在しており，様々な燃焼現象でも観察されている[6, 14, 15]．

本研究では，複雑ネットワークの観点から，高周波燃焼振動の駆動領域を明らかにする．音響エネルギー方程式の生成項で示されるように，燃焼室の圧力変動と発熱率変動の積$p'\dot{q}'$は燃焼振動の駆動と減衰に深く関わる．そこで，$p'\dot{q}'$を空間ネットワークのノードとする熱音響ネットワークを提案する．ノードiを中心とする半径r_iの円内に存在するノードjに対して，$p_i'\dot{q}_i'>0$かつ$p_j'\dot{q}_j'>0$となるとき，互いのノードを結ぶ**【図5】**．ただし，ノードiの音波が時間分解の間に伝播する距離をr_iとする．このようにして，A_{ij}を成分とする隣接行列



【図5】 熱音響ネットワークの構築

$$A_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } p_i'q_i'>0 \text{ and } p_j'q_j'>0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

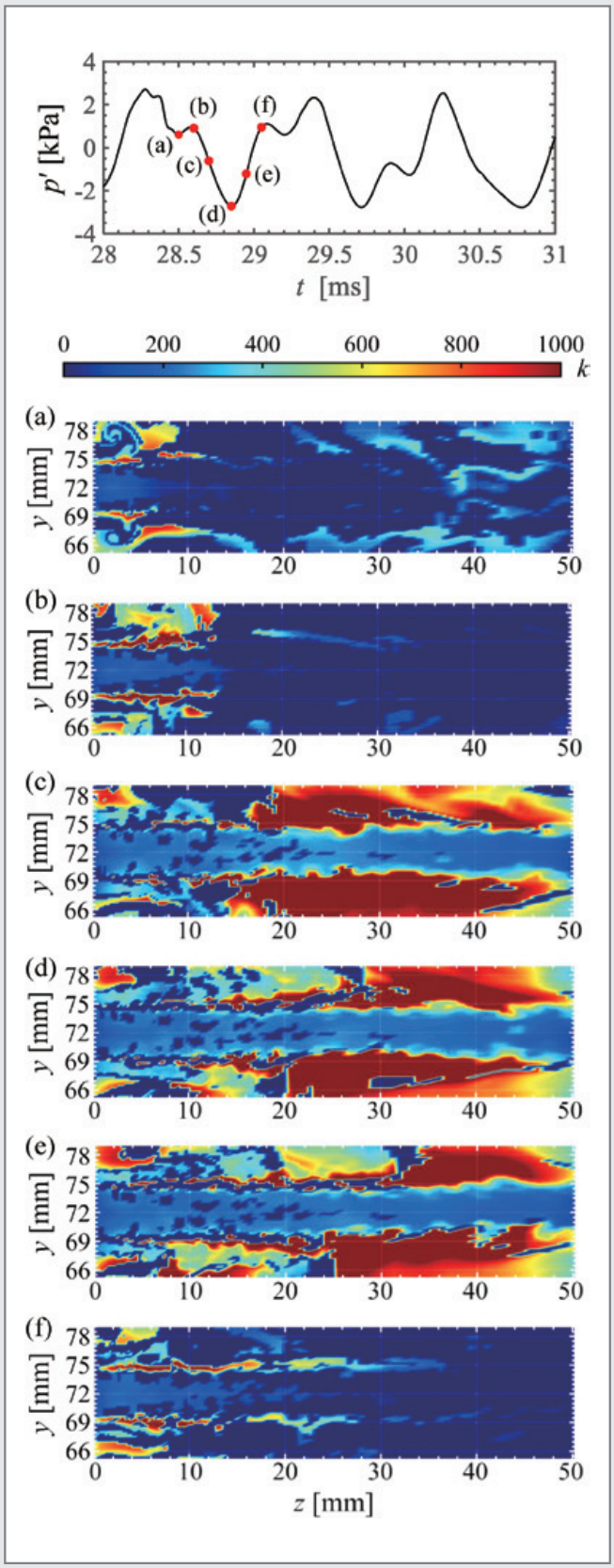
を構築する．本研究では，A_{ij}を用いてネットワークの特徴量として次数k_iとクラスター係数C_i

$$k_i=\sum_j A_{ij}$$

$$C_i=\frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}$$

を求める．ただし，E_iはノードiを含む三角形の総数である．k_iはノードiに接続されるリンク数，C_iはノードiとその隣接ノード間で形成される三角形が存在する割合を表す．

【図6】に高周波燃焼振動が形成されているときの

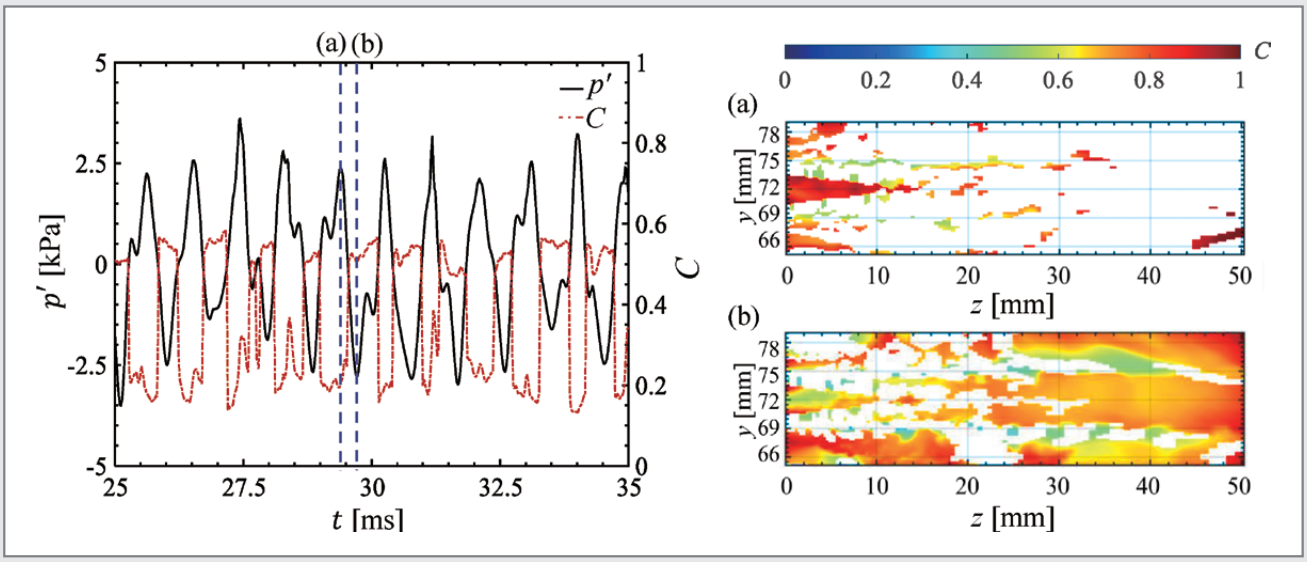


【図6】高周波燃焼振動が形成されているときの圧力変動p'と熱音響ネットワークの次数kの空間分布の関係[3)]

p'と次数の空間分布の関係を示す．圧力変動が極小値をとるとき，高い次数を持つノードが水素噴流と酸素噴流のせん断層領域で形成される．このノードはネットワークのハブとなり，燃焼振動の駆動核に対応する．このようなハブの生成と消滅を繰り返しながら，燃焼振動は維持される．**【図7】**に高周波燃焼振動が形成されているときのp'とクラスター係数Cの時間変化を示す．ただし，両者は空間平均されたものとする．また，圧力変動が極値をとるときの瞬時のクラスター係数の空間分布も示す．圧力変動が極大値をとるとき，Cは噴射器の出口付近で高くなり，熱音響源のクラスターが形成される．圧力変動が極小値をとるとき，熱音響源のクラスターはせん断層領域と下流領域において広く形成される．Cはp'と逆位相で周期的に変化しており，熱音響源の周期的な形成と崩壊が生じている．この周期は高周波燃焼振動の音響モードと対応している．これらの結果は熱音響ネットワークのクラスター係数が燃焼振動の形成メカニズムを理解する上で重要となることを示している．

噴射器内の燃料／酸化剤の速度変動，圧力変動と発熱率変動の関係[12)]を踏まえて，本研究で観察される高周波燃焼振動の形成メカニズムは次のように考えられる．(i) 突発的に発生する発熱率変動が燃焼室内の圧力変動を引き起こし，噴射器内に伝播した圧力変動が水素の速度変動を引き起こす．(ii) 水素の速度変動により，着火位置が変化し，発熱率変動が生じる．(iii) 圧力変動が増幅するにつれて，圧力変動と発熱率変動で位相同期が生じる．(iv) 位相同期の形成に伴って，せん断層領域において熱音響クラスターの形成と崩壊が周期的に繰り返され，高周波燃焼振動が維持される．これらの研究内容は，米国物理学協会の AIP New と Physics of Fluids 誌の「Featured Article」，英国物理学会の「Physics World」で取り上げられている．

複雑ネットワークを部分グラフに分割したコミュニティーは，大規模なネットワーク構造を理解する上で有用である．最近，筆者らは音響エネルギー流束を考慮した空間ネットワークを提案し，コミュニティーのハブと高周波燃焼振動の駆動領域との関係を明らかにしている[16)]．また，筆者らは旋回燃焼器で観察される燃焼振動を対象に，渦同士の相互作用に着目した乱流ネットワークのコミュニティーとそのハブの抽出も行っている[17)]．今後，コミュニティー抽出が，様々な燃焼器内の燃焼振動の基礎的解明に役立つと思われる．



【図 7】高周波燃焼振動が形成されているときの圧力変動 p' と熱音響ネットワークのクラスター係数 C の時間変化[3)]

■ おわりに

本稿では，ロケットエンジン用サブスケール燃焼器内に形成される高周波燃焼振動の時空ダイナミクスと形成メカニズム[2, 3)]の一端を紹介した．これらの研究内容に加えて，筆者らは宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 推進技術研究ユニットとの共同研究[18)]により，安定燃焼から高周波燃焼振動への遷移過程において，ホップ分岐を伴う間欠現象が観察されることを明らかにしている．また，記号力学に基づく推移ネットワークの情報エントロピーが，間欠現象のダイナミクスの理解に有用であることも明らかにしている．複雑系科学の基礎理論とその数理解析法が，航空宇宙分野における非線形問題の基礎学理の深化に繋がることを期待したい．

■ 謝辞

本研究は，2021 年度まで，宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 数値解析技術研究ユニット 松山新吾 主任研究開発員と大道勇哉 主任研究開発員との共同研究として進められたものである．また，本研究は，工学研究科機械工学専攻 橋本達也（2018 年度修了），澁谷朔（2019 年度修了），島里実（2020 年度修了），中村洸介（2021 年度修了），川野一樹（2022 年度修了）と進めたものである．深く御礼申し上げる．

参考文献

1）東京理科大学工学部機械工学科 後藤田研究室 https://www.rs.tus.ac.jp/gotodalab/Activity.html
2）T. Hashimoto, H. Shibuya, H. Gotoda, Y. Ohmichi and S. Matsuyama, Physical Review E, vol. 99, 032208, 2019.
3）S. Shima, K. Nakamura, H. Gotoda, Y. Ohmichi and S. Matsuyama, Physics of Fluids, vol. 33, 064108, 2021.
4）F. A. Williams, *Combustion Theory*（2nd edition, CRC Press, 1984）.
5）Y. Nomi, H. Gotoda, S. Kandani and C. Almarcha, Physical Review E, vol. 103, 022218, 2021.
6）H. Gotoda, H. Kinugawa, R. Tsujimoto, S. Domen, and Y. Okuno, Physical Review Applied, vol. 7, 044027, 2017.
7）H. Kobayashi, H. Gotoda, S. Tachibana and S. Yoshida, Journal of Applied Physics, vol. 122, 224904, 2017.
8）T. Lieuwen, *Unsteady Combustor Physics*（Cambridge University Press, 2012）.
9）P. Kasthuri, I. Pavithran, S. A. Pawar, R. I. Sujith, R. Gejji and W. Anderson, Chaos, vol. 29, 103115, 2019.
10）D. Watanabe, H. Manako, T. Onga, T. Tamura, K. Ikeda and M. Isono, Mitsubishi Heavy Industries Technical Review, vol. 53, 28, 2016.
11）G. P. Sutton and O. Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*（John Wiley & Sons, 2017）.
12）S. Matsuyama, D. Hori, T. Shimizu, S. Tachibana, S. Yoshida and Y. Mizobuchi, Journal of Propulsion and Power, vol. 32, 628, 2016.
13）蔵本由紀，河村洋史，同期現象の科学，京都大学出版，2017.
14）Y. Okuno, M. Small and H. Gotoda, Chaos, vol. 25, 043107, 2015.
15）H. Kinugawa, K. Ueda and H. Gotoda, Chaos, vol. 26, 033104, 2016.
16）K. Kawano, H. Gotoda, Y. Nabae, Y. Ohmichi and S. Matsuyama, Journal of Fluid Mechanics, vol. 959, A1, 2023.
17）Y. Mori, S. Kishiya, T. Kurosaka and H. Gotoda, Physical Review Applied, vol. 19, 034097, 2023.
18）C. Aoki, H. Gotoda, S. Yoshida and S. Tachibana, Journal of Applied Physics, vol. 127, 224903, 2020.