高校数学で楽しむ数理モデルと予測不可能性

東京理科大学 理学部第一部 応用数学科 准教授 犬伏（いぬぶし） 正信（まさのぶ）

はじめに：応用数学の魅力

この記事では主な読者として高校生や大学生を想定し，高校数学（複素数，二次関数，漸化式，指数／対数関数）のみを用いて応用数学，特に数理モデルとその予測不可能性について紹介します．そもそも応用数学や数理モデルとは何でしょうか？ 私なりにその魅力を解説してみます．

数学の応用の一例として，天気予報を考えてみましょう．天気予報には実はたくさんの数学が使われています．降水確率という言葉から，確率や統計が使われていることは想像できると思いますが，その他にも天気の時間的・空間的な変化は微分を用いた数式で表されていますし（数値予報モデル），そのモデルを用いて正確な天気のコンピュータシミュレーションをすることとは積分をしていることに対応します．天気予報の他にも，感染症のモデルも同様ですし，データ科学や人工知能（AI）も中身は数学です．例えば，人工ニューラルネットワークを学習するためによく使用される手法の基礎は合成関数の微分です．

応用数学とは「現実の問題解決のために数学を応用できるようにするための学問」です．数学の研究は主に「紙と鉛筆」を道具として使いますが，応用数学ではそれに加えて多くの分野でコンピュータを研究の道具として使います．厳密かつ抽象的な数学がコンピュータの力を借りることによって現実の問題を解決しているのです．数理モデリングはそんな応用数学の一つの研究分野です．現実の現象を数式で表現し，コンピュータシミュレーションを通して現象を理解し，さらに予測につなげることを主な目標としています．

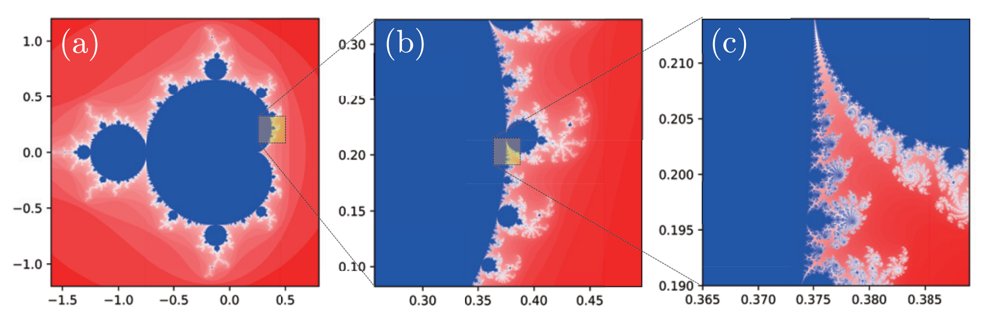
データ科学や暗号技術に代表されるように，コンピュータを使った数理的技術はこれからますます社会に浸透していき，応用数学はより一層重要になります．情報科学に限らず，自然科学や工学など様々な分野で使われるシミュレーションの基礎を支え発展させることも応用数学の重要な研究課題であり，応用先の分野が非常に広いこともその魅力です．ぜひ応用数学科のホームページ（https://appmath.tus.ac.jp/）にある解説やコラムも参照してみてください．

私的サイエンスへの招待 1 〜謎めいた図形と単純な式〜

応用数学の魅力をお伝えすることで，「サイエンスへ招待」したいところですが，まずは私自身が高校生の頃に「サイエンスへ招待」された経験からお話したいと思います．私が通っていた駿台予備校の数学教師はユニークな人が多く，その中の一人の講師の方が（受験とは直接関係のない寄り道として）**【図 1 (a)】**のような図形を見せて下さいました．照明を落とした薄暗い部屋のスクリーンに投影された謎めいた図形には強烈なインパクトがありました．この図形の説明のためにその講師の方が黒板に書いた式は，

$$z_{n+1}=z_n^2+c$$

のみでした．ここで $z_n(n=0,1,\ldots)$ や c は複素数であり，$z_0=0$ とします．複素数とはいえ，漸化式なので定数 c を定めれば次々に $z_1, z_2, \ldots$ が決まっていきます．実は $|c|$ が大きな値の場合，$|z_1|, |z_2|, \ldots$ は発散します．一方で $|c|$ が小さな値の場合，$|z_1|, |z_2|, \ldots$ は発散しません．数列 $|z_1|, |z_2|, \ldots$ が発散する／しないという「運命」は複素定数 c によって決まりますが，その運命を分けているのが【図 1】の謎めいた図形の正体で



【図 1】マンデルブロ集合．(b)，(c) はそれぞれ (a)，(b) の一部の拡大図．

す．正確には，【図 1】は複素平面を描いており，$|z_1|, |z_2|, \ldots$ が発散しないような複素数 c の集合を青色で示しています．この図形はマンデルブロ集合と呼ばれています．参考までに，大学ではこの集合は次の記号を使って簡潔に定義されます：$\{c \in \mathbb{C} \mid |z_n| \nrightarrow \infty\ (n \to \infty)\}$.

若干定義がわかりにくかったかもしれませんが，(複素数とはいえ) 2 乗と足し算だけの式なので単純です．この集合のおもしろいところは，一部を拡大していくと，また似たような図形が繰り返し現れることです．**【図 1(b)】**は【図 1(a)】の中央右上の四角形内を 10 倍に拡大した図です．さらに【図 1(b)】の中央の四角形内を 10 倍に拡大すると**【図 1(c)】**になります．このような複雑な形の入れ子構造はいくら拡大しても，どこまでも続いています．その繰り返される複雑な「地形」が $z_{n+1} = z_n^2 + c$ という単純な式のみから生み出されることに，当時高校生だった私は大変驚愕しました．このような図形はフラクタルと呼ばれますが，純粋数学的な興味と同時に，フラクタルは現実の雲や植物の葉などの形の数理モデルとしても研究されています[1)].

私的サイエンスへの招待 2 〜振り子の先の振り子は予測できない？〜

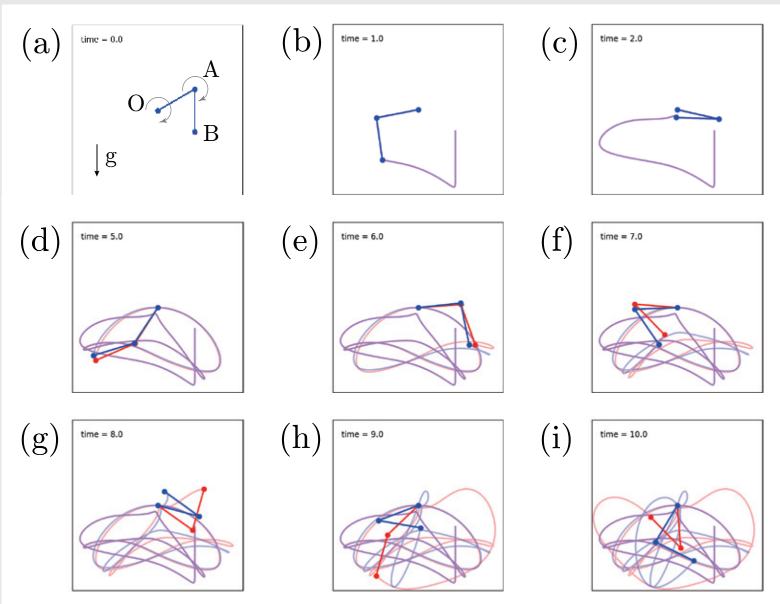
続いて私が「サイエンスへ招待」された経験は，大学 1 年次の物理学実験でした．実験室にあった「二重振り子」について TA（ティーチング・アシスタント）の大学院の先輩が「現代物理学をもってしても，この運動は予測できない」と言いました．

「二重振り子」とは**【図 2(a)】**のように，通常の振り子（単振り子）の先にもう一つ振り子が付いているものです．点 A，B は質点であり，OA，AB は質量の無視できる棒を表しています．中央の点 O の位置は固定されており，加わる力は紙面下向きの重力のみとして，適当な位置から手を離すことを考えます．そのシミュレーションをした結果が【図 2】です．時間の経過とともに（a），（b），…，（i）に並べて表示しました．曲線は点 B の軌跡を表します．なお，東京理科大学の池口徹研究室（工学部情報工学科）が公開している実験動画がわかりやすいので是非見てみてください：https://www.youtube.com/watch?v=qEwJcWwahmo

【図 2】では（a），（b），（c）と時間が進むにつれて二重振り子は不規則な運動を見せ，点 B の軌跡は複雑な曲線となります．しかし，しょせんは振り子なので，力学（ニュートンの運動方程式）によって予測はできるはずです．大学 1 年生（で生意気）だった私は「コンピュータでシミュレーションをすることで予測は可能なはず．現代物理学といえば素粒子やブラックホールの運動を研究しているのに，たかが振り子の運動を予測できないはずはない！」と思いました．

【図 2】の青色の二重振り子の後ろには，実は別の二重振り子（赤色）のシミュレーションの結果を載せています．青と赤の二重振り子はほぼ同じ条件で，互いに独立にシミュレーションをしています．2 つのシミュレーションの条件の違いは最初の時刻の質点 B の位置がわずかに異なるという点です．点 B の位置の違いは非常に小さいので，最初の時刻（a）やその後しばらく（b），（c）は違いが全く見られません．ところが（d）になると初期の条件の違いが少し見え始め，（e），（f），…とその違いは急速に拡大し，（i）では全く違う振り子の状態になります．

シミュレーションを用いて現象を予測をする際に，未来の状態が最初の時刻における状態（初期値）に強く依存する性質のことを，「初期値鋭敏性」といいます．通常シミュレーションの初期値は観測値（二重振り子の場合は，それぞれの振り子の角度と角速度）を用います．現実の観測値には必ず誤差が含まれますが，その誤差は急速に（指数関数的に）拡大するので，いずれ実現象とシミュレーションの結果は大きく異なり，



【図 2】二重振り子の運動．（a）から（i）の順に時間が経過．

予測は外れてしまうのです．いくら精度の良い測定をしても原理的に予測は外れてしまうので，大学院の先輩が教えてくれたことは間違いではなかったわけです．

非線形科学への招待

前述のマンデルブロ集合と二重振り子の予測不可能な運動，この２つには実は共通した数学的性質があります．それはどちらも「非線形」だということです．非線形とはおおざっぱに言うと曲がっているということです．マンデルブロ集合の定義に現れた式は２次式（２次関数）でしたが，これは例えば実関数だと思うとそのグラフは慣れ親しんだ放物線であり，曲がっていることが納得できると思います（二重振り子の場合も同様）．これらの対象は「非線形科学（Nonlinear Science）」と呼ばれる広い分野で研究されています．本稿では「非線形科学への招待」として，非線形な数理モデルと予測不可能性について，引き続きもう少し詳しく紹介したいと思います．

初期値鋭敏性と天気予報の難しさ

初期値鋭敏性は，広く様々な分野の数理モデルにおいて見られる「カオス」と呼ばれる現象が持つ性質です．二重振り子に限らず，身近な例では長期の天気予報が外れてしまう原因もカオスの初期値鋭敏性にあると考えられています．基本的な考え方は既に述べた二重振り子の場合と同様ですが，天気予報をする際はスーパーコンピュータを用いて数理モデル（数値予報モデル）のシミュレーションを行います．スーパーコンピュータに現在の大気状態（風速や気温等）の観測値を入力し，シミュレーションを行うのですが，観測値には必ず誤差が含まれます．その誤差が時間と共に急速に増大するので，数日先の天気は予測できても（振り子の例では【図２(a)，(b)，(c)】に対応），例えば数週間後の天気の予測は難しいのです（振り子の例では【図２(g)，(h)，(i)】に対応）．長期的な天気予報が難しいのは，数理モデルに現れるカオスが原因だったのです．

天気予報が原理的に難しい数理的なカラクリはわかったのですが，「予報が当たらない原因がよくわかった，メデタシメデタシ！」ということでは困ります．気象庁ではカオスの数理的知見を天気予報に活かすことで「アンサンブル予報」を行っています（https://www.jma.go.jp/jma/kishou/know/whitep/1-3-8.html）．観測値に有限の誤差が含まれることは避けようがないので，初期値にあえて小さな誤差を加えた「仮想的な地球」をスーパーコンピュータの中に複数作り出し，その複数の地球の未来をシミュレーションによって予測するのです．そうすることで，単一のシミュレーションの結果からは得られない情報が色々とわかります．例えば，予測が外れる時間（逆に予報が信頼できる時間）や予報が外れた後の結果の信頼性，などです．少し分かりにくいので，もう少し簡単な別の数理モデルで具体的に説明します．

村上春樹氏も興味津々？なカオス

余談ですが私は昔から村上春樹氏のファンです．村上氏がサイト「村上さんのところ」上で読者から質問を募集していたことがあったので，カオスに関する研究していることをお伝えして「数学や物理にどのような印象をお持ちでしょうか？」と質問してみたことがあります．私の不躾な質問にもかかわらずご丁寧な回答を下さり，次のように締めくくられていました：

“カオスにはとても興味があるのですが，数字が出てくるとちょっと弱いかもしれません。”

村上氏からメールを頂き，さらにカオスに興味をお持ちということを知ることができて，大変感激しました．（全文は文献（新潮社刊）[2)]#2657 に掲載）．村上作品に登場する「理解というものは，つねに誤解の総体に過ぎない」という認識の方法は，誤解（誤差）の存在を前提にしている数理モデリングやカオスの認識の方法とどこか通底しているような気がします．

高校数学で楽しむ生物個体数の数理モデリング

２次関数 $f(x)=4x(1-x)$ と漸化式 $x_{n+1}=f(x_n)$ はどちらも高校の数学で習いますが，それらを組み合わせた漸化式

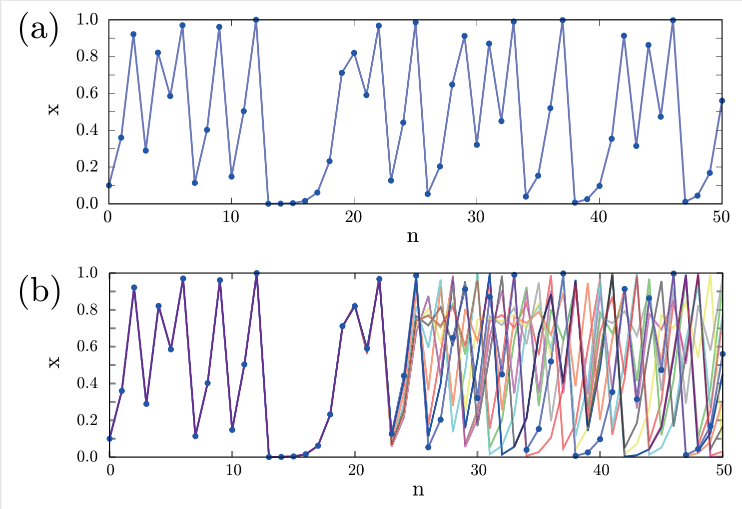
$$x_{n+1}=f(x_n)=4x_n(1-x_n) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

はあまり見たことがないかもしれません．これは生物の個体数の増減（人口増減）の数理モデルであり，x_n はある年（n）における生物の個体数を表します．厳密には x_n は「個体数上限に対する割合」であり，$0 \leq x_n \leq 1$ です．このモデルは２次関数を用いているので，非線形な数理モデルです．

個体数の変化率を $x_{n+1}/x_n (x_n>0)$ と定義すると，漸化式から以下の式が得られます：$x_{n+1}/x_n=4(1-x_n)$．この変化率が１より大きければ個体数は増加，

1 より小さければ減少していることになります．個体数が少なく，$4(1-x_n)\simeq 4$，となっているときは毎年 4 倍ずつ個体数が増大することになります（等比数列）．個体数が多くなり過ぎると（具体的には $4(1-x_n)<1$ のとき，つまり $x_n>3/4$ になると）減少することになります．これは個体数が多くなり過ぎて環境が悪化することのモデル化（数式による表現）と考えることができます．正確な定義やこのモデルの詳細や数学的性質については文献[1] を参照してください．

さて，ある年（$n=0$ とします）において $x_0=0.1$ とします．これは，最初の年において生物の個体数は個体数上限の 10% とする，という意味です．翌年（$n=1$）の個体数割合は，漸化式から $x_1=4\times 0.1(1-0.1)=0.36$ となります．このように次々と計算していくことで数列が $x_0, x_1, x_2, \cdots$ と決まっていきます．これは簡単ですが生態系のシミュレーションです．この数列を【図 3(a)】に表示しました．横軸は n，縦軸は x_n としました．上で $n=0, 1$ の場合に計算した結果が，【図 3(a)】にプロットされていることを確かめてみてください．$0\leq n\leq 12$ では個体数は不規則に変動し，その後は個体数がかなり減って落ち着いたように見えて，また不規則な変動を繰り返します．馴染みのある 2 次関数と漸化式を組み合わせただけですが，意外な結果ではないでしょうか？



【図 3】生物の個体数の時間的変化．（a）初期値 $x_0=0.1$ の場合．（b）10 個の相異なる初期値を用いたアンサンブル予報．

この数理モデル（漸化式）はロジスティック写像と呼ばれます．初期の状態 x_0 が決まった時点で，ロジスティック写像によって個体数の未来は決まっていますが，ランダムに見える不規則な変動が起こりました．これは二重振り子のところでも登場したカオス現象です．カオスの厳密な定義は難しいのですが，数学的な定義やその他の数学的な性質について，興味のある人は[3, 4]を覗いてみてください．ロジスティック写像の定義は単純ですが，数学的には豊富な内容を持っています．そのことを文献[3]では次のように表現しています．

“簡単な話のように聞こえるだろうが，あえて言い添えておくならば，この単純な 2 次関数の反復が完全に理解できるようになったのは，何百人もの数学者の努力の末，やっと 1990 年代の終わり頃になってからのことなのである．”

ロジスティック写像はこのように数学的には重要な研究対象ですが，現実の生物の個体数のモデルとしては単純過ぎると感じるかもしれません．本当に生物の個体数がカオス的に変動することなどあるのでしょうか？　2022 年 6 月に発表された研究[5]によると，172 種の生物の個体数変化のデータを調査した結果，その 30% 以上がカオス的な変動をしているそうです．彼らは応用数学の観点から，生態系には予測が難しい場合が多くあることや，生態系の保全について注意が必要であることを述べています．

■ 生物の個体数のアンサンブル予報

天気予報のところで少し触れたアンサンブル予報について，ロジスティック写像を例に具体的に説明します．まず，生物の個体数を予測するためにロジスティック写像を用いることを考えます．先ほどは最初の年は $x_0=0.1$ としましたが，現実の観測には常に誤差があるので，ほんの少しだけ誤差がある状況を複数考えます．例えば，$x_0=0.10000002$ や $x_0=0.10000007$ など普通は無視してしまうような小さな誤差があるとします．このような「仮想的な生態系」を 10 個考え，それぞれ独立にロジスティック写像によって計算を行い，結果を**【図 3(b)】**に示しました．青色の点は**【図 3(a)】**と同じ結果の再掲です．カラフルな 10 本の線は $x_0=0.10000002$ のような（10^{-8} 程度の）小さな誤差を加えた，異なる 10 個の初期値から計算した結果です．最初のあたりの時刻ではほとんど結果に差は見られませんが，$n=23$ のあたりで結果に違いが見られるようになり，$n>25$ では結果は大きく変わっていることがわかります．

単一のシミュレーションではいつ予測が外れるかは不明ですが，このように複数の計算（シミュレーショ

ン）を同時に行うことで付加的な情報が得られます．例えば今回の場合では，おおよそ $n<23$ では予測結果を信用して良さそうなこと，$n=23, 24, 25$ はある程度の誤差の範囲で予測は信用できそうなこと，$n>30$ ではほとんど予測は信用できないこと，などがわかります．台風の進路予報は社会的にも重要ですが，未来の予報になるにつれて予報は難しくなります（予報円の大きさは大きくなる)．「生物の個体数」と「台風の位置」という全く異なる分野の話ですが，数理モデリングによる予測という観点では類似しています．

予測の破綻を予測する

言葉遊びのようなタイトルをつけてしまいましたが，ロジスティック写像による予測が外れる時間（$n=23$）をあらかじめ知ることはできるでしょうか？

まず，初期の個体数に加えられた誤差が非常に小さいことに注目し，その誤差がどのように時間と共に変化するかを考えます．2 つの初期の個体数を x_0, y_0 とし，その差 x_0-y_0 が非常に小さいとします（上の例では $|x_0-y_0|=10^{-8}$)．これまでと同様に，これら 2 つの生態系は初期値の違い以外は全く同一とします：

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$$
$$y_{n+1}=4y_n(1-y_n)$$

これを両辺引き算すると，

$$x_{n+1}-y_{n+1}=4(x_n-y_n)-4(x_n-y_n)(x_n+y_n)$$

となります．各 n における差を

$$d_n=x_n-y_n$$

とおくと，

$$d_{n+1}=4d_n-4d_n(2x_n-d_n)$$

となりますが，差 d_n は小さいとして d_n^2を無視すると

$$d_{n+1}=4(1-2x_n)d_n \cdots (\star)$$

となります．$|d_{n+1}/d_n|=|4(1-2x_n)|>1$ となるときに誤差は増えていくので，x_n について解くと

$$x_n<3/8 \text{ または } x_n>5/8$$

のときに誤差は増大すること，つまり個体数が少ないときと多いときに誤差は拡大することがわかります．

さて，ロジスティック写像を用いて x_n を計算し，その結果と式 $(\star)$ を用いることで d_{n+1} を計算できます．このように時間と共に誤差 d_n がどのように変化するかを計算することができます．カオスでは誤差は指数関数的に増大するので，正の定数 L を用いて

$$|d_n|=|d_0|e^{Ln} \cdots \ (\star\star)$$

となると考えてみましょう．この L は予測が外れる“速さ”を表す定数でリヤプノフ指数と呼ばれています（正確な定義は文献[4, 6]を参照のこと)．実はロジスティック写像では

$$L=\log_e 2$$

となることが厳密に示されているので[4)]，この値を使って【図 3(b)】の結果を考察してみましょう．誤差は最初の時刻では $|d_0|=10^{-8}$ でした．個体数は $0 \leq x_n \leq 1$ の範囲で変動するので誤差の大きさが 0.1 になるとき，つまり $|d_n|=10^{-1}$ となるときに予測が外れた（破綻した）と考えることにします．式$(\star\star)$ を n について解くと，

$$n=\frac{1}{L}\log_e\frac{|d_n|}{|d_0|} \cdots \ (\star\star)'$$

なので，上記の値を代入すると

$$n=7 \quad \log_e 10/\log_e 2 \simeq 23$$

となります．確かに【図 3(b)】の結果では $n=23$ において誤差が 0.1 程度になったので，予測が外れる時間，言い換えると「予測可能時間」を数学的な結果を用いて説明できたといえます．

力学系理論：数理モデルのための数学

数理モデルを解析する上で，力学系理論（dynamical system theory）と呼ばれる数学理論は見通しの良い視点や道具を与えてくれます[3, 4, 6)]．力学という言葉が付いていますが，物理の力学（mechanics）を含む一般的な数理モデルを扱う数学理論です．文献[6)]では力学系理論を次のように表現しています：

“化学に元素があり物理に素粒子があることと同じように，（微分方程式の）動力学にも基本的な要素がある．それらの要素にはアトラクタ，吸引領域，サドル，ホモクリニック点，カスケード，馬蹄などがある．”

微分方程式は大学で習う数学ですが，数理モデルによく用いられます．分野によらず数理モデルに共通した要素を統一的に調べるための数学が力学系理論です．本稿で紹介したマンデルブロ集合（複素力学系)，二重振り子やロジスティック写像は力学系のほんの一例であり，物理学，工学，化学，生物学，経済学，社会科学（例えば感染症や渋滞）などに現れる数理モデルが力学系理論の枠組みで調べられています．情報科学（AI）で重要な人工ニューラルネットワークは脳神経科学における数理モデルから発展したものであり，力学系理論を用いて盛んに研究されています[7, 8)]．

■ 私的サイエンスへの招待３　～カオスとフラクタルな流れ～

私が非線形科学に引き寄せられた決め手は「乱流力学」という書籍[9]との出会いでした．空気や水の流れは流体力学という分野で研究されていますが，特に（おおざっぱな表現ですが）乱れた流れのことを乱流といいます．飛行機に乗ると乱気流という言葉を聞きますが，もっと身近に，例えばコーヒーをスプーンでかき混ぜたとき，その流れは基本的には乱流です．

「乱流力学」では乱流をカオスとして捉えており，当時（学部４年生）の私にとってその見通しの良い視点に衝撃を受けました．コーヒーカップの中の流れも飛行機周りの流れも，基本的にナビエ-ストークス方程式と呼ばれる方程式に従って運動します．方程式（数理モデル）があるにもかかわらず不規則な運動が起こるので，その点で先述の二重振り子等と同様にカオスと考えられます．さらに乱流中では渦がフラクタル的に入れ子になっているという描像もあるので[9]，過去の「私的サイエンスへの招待１，２」の経験が伏線として乱流に結びついたようでした．

乱流は物理学や工学などの幅広い応用分野において重要です．先述の天気予報においても流れが乱流であることが予測を困難にしていますし，飛行機の形状や化学プラントの流路のシミュレーションや設計には乱流による抵抗がそのエネルギー効率に大きな影響を与えます．それと同時に，乱流を記述すると考えられているナビエ-ストークス方程式には，数学的にも極めて重要な未解決問題があります[10]．

近年では，データ科学・人工知能の分野から新しい応用数学的手法が次々と登場し，乱流の問題にも適用されています．私の研究室では流体混合の最適化に人工知能を応用する基礎研究を行っています[11]．例えていうと，コーヒーにミルクを入れたときに，どのようにスプーンを動かすと短い時間で効率良く混ぜることができるか？という問題を数学的に定式化（数理モデリング）し人工知能に解かせてみました．すると，人工知能には混ぜ方を教えていないにもかかわらず，効率的な混ぜ方（カオスの本質的な仕組みとして知られる"引きのばしと折りたたみ"による混ぜ方[1, 3, 4, 6]）を自動で見つけ出しました．詳しくはプレスリリースをご覧ください［https://www.tus.ac.jp/today/archive/20220905_5729.html］．

流体力学は物理や工学の基盤を支える学問ですが，応用数学としても重要な研究対象です．詳しくは（大学院生向けですが）ケンブリッジ大学出版の応用数学シリーズから出ている Doering and Gibbon による書籍[12]や日本流体力学会の会誌「ながれ」の特集（2022 年 41 巻５号）「ながれの数理：大学数学で垣間見る数理流体力学の魅力と最前線」［https://www.nagare.or.jp/publication/nagare.html］がおすすめです．

■ まとめ

本稿では応用数学の一分野である数理モデリングについて解説しました．一見単純そうな数理モデルでも，（非線形性があると）予想もしなかったような数理的な現象が起こることを，フラクタルやカオスを例に紹介しました．「私的サイエンスへの招待」で述べたように，私は講師や先輩の方々，書籍[9]から，「今はわからないけどおもしろそうな興味・疑問の種」をたくさん教えて頂きました．私の拙い解説記事を通して，高校生や大学生の皆さんがそのような種を受けとり，応用数学や数理モデリングの重要性や楽しさを少しでも感じ取ってくれたらと思います．

最後に，転載や引用をお認め頂いた新潮社，村上春樹氏の事務所，池口徹先生，原稿にコメントを下さった村上秀俊先生，松元智嗣氏，井上渉氏，家族に心より感謝申し上げます．

参考文献

1）山口昌哉，カオスとフラクタル（ちくま学芸文庫，2010）．
2）村上春樹（著），フジモトマサル（絵）「村上さんのところ コンプリート版」（新潮社，2015）．
3）M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney（著），桐木紳，三波篤郎，谷川清隆，辻井正人（訳）「力学系入門―微分方程式からカオスまで―」（共立出版，2017）
4）C. Robinson（著），国府寛司，柴山健伸，岡宏枝（訳）「力学系〈上〉，〈下〉」（シュプリンガー・ジャパン，2001）．
5）T. L. Rogers, B. J. Johnson, and S. B. Munch, Nat. Eco. & Evol. 6, 1105-1111（2022）．
6）K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke（著），津田一郎（監訳）「カオス〈第１，２，３巻〉―力学系入門」（シュプリンガー・ジャパン，2006）．
7）犬伏正信，吉村和之「リザバーコンピューティングに適した力学系の特性と構造」，電子情報通信学会誌 102 号，114-120（2019）．
8）K. Nakajima and I. Fischer（Eds.），Reservoir Computing（Springer, 2021）．
9）木田重雄，柳瀬眞一郎「乱流力学」（朝倉書店，1999）．
10）米田剛「数理流体力学への招待：ミレニアム懸賞問題から乱流へ」（サイエンス社，2020）．
11）M. Konishi, M. Inubushi, and S. Goto, Sci. Rep. 12, 14268（2022）．
12）C. R. Doering and J. D. Gibbon, Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations（Cambridge University Press, 1995）．